

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.
DIPARTIMENTO DI FISICA NUCLEARE E TEORICA

-
Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Calcolo di precisione e simulazione Monte Carlo del processo Bhabha

Relatore **Chiar.mo Prof. Guido Montagna**

Correlatore **Dott. Carlo M. Carloni Calame**

Tesi di Laurea Specialistica di

Giovanni Balossini

Anno Accademico 2004/2005

Indice

Indice	iii
Introduzione	1
1 Misura di R e luminosità	3
1.1 Il rapporto R e suoi metodi di misura	3
1.2 Parametri del Modello Standard e rapporto R	5
1.3 Determinazione della luminosità e processo Bhabha	7
2 Correzioni radiative di QED e Parton Shower	11
2.1 Singolarità collineari e infrarosse	11
2.2 Cancellazione infrarossa	15
2.3 Vertice di Altarelli-Parisi	16
2.4 Equazioni di Altarelli-Parisi	21
2.5 Metodi risolutivi e Parton Shower	23
3 Matching e BABAYAGA	31
3.1 Correzioni radiative esatte $\mathcal{O}(\alpha)$	31
3.2 Parton Shower e correzioni $\mathcal{O}(\alpha)$: il “matching”	32
3.3 Generazione di eventi con BABAYAGA	34
4 Risultati numerici	41
4.1 Indipendenza dal separatore infrarosso	41
4.2 Criteri di selezione degli eventi	41
4.3 Contributi alla sezione d’urto totale	43
4.4 Distribuzioni	48
4.5 Confronto con calcoli indipendenti	49
Conclusioni	57
A Calcoli	59
A.1 Somma sulle polarizzazioni per il fotone	59
A.2 Elementi di matrice con correzioni radiative esatte $\mathcal{O}(\alpha)$	61
Bibliografia	63
Ringraziamenti	67

Introduzione

Gran parte della ricerca in fisica delle alte energie degli ultimi anni è stata incentrata sulla validazione del Modello Standard ([1]). Della teoria delle interazioni elettrodeboli con la sua estensione alla Cromodinamica Quantistica (QCD) si ha, ormai, una conoscenza estremamente precisa. Dopo i successi degli anni Ottanta e Novanta, con la scoperta dei bosoni W e Z e del quark top, rimane sostanzialmente ancora un importante obiettivo da raggiungere: l'osservazione diretta del bosone di Higgs. Pur avendo informazioni indirette e pur potendo stimare un intervallo di masse plausibili mediante effetti virtuali ad osservabili di precisione, ancora non si hanno prove dirette della sua esistenza, cruciale per la verifica del Modello Standard. Un aiuto a tale ricerca viene dalla valutazione dei valori di massa maggiormente probabili, ma tale modo di procedere è vincolato alla conoscenza del valore il più possibile esatto della costante di accoppiamento elettromagnetica α al picco della Z^0 .

La conoscenza dell'andamento di α ad alte energie richiede la misura della sezione d'urto di produzione di adroni ad energie più basse, tra qualche centinaio di MeV e la decina di GeV. Questa viene effettuata mediante lo studio dei processi di interazione tra positroni ed elettroni e la determinazione del parametro R . Come si mostrerà nel capitolo 1, R è dato dal rapporto tra la sezione d'urto del processo e^+e^- in adroni e quella del processo e^+e^- in muoni e l'accuratezza nella sua determinazione richiede un'attentissima analisi della luminosità degli acceleratori utilizzati, chiamati in gergo "flavour factory". Nel seguito sarà spiegato in dettaglio come si rende, dunque, necessario il calcolo di precisione della sezione d'urto teorica del processo Bhabha $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, utilizzato ai fini della valutazione della luminosità.

Un'ulteriore importante motivazione per lo studio di R è il calcolo di precisione del momento magnetico anomalo del muone a_μ . Lo studio di questo parametro potrebbe, infatti, evidenziare limiti di validità del Modello Standard stesso, mostrando, nel confronto tra i valori attesi della teoria e i dati sperimentali, che già sono noti con elevata precisione, effetti riconducibili a "nuova fisica" ([2]).

Il presente lavoro è stato realizzato nell'ambito delle attività del gruppo di ricerca in fisica teorica delle alte energie del Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica dell'Università e della Sezione di Pavia dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare. Si è trattato del prosieguo di un'attività pluriennale, che ha visto, nel 2000, la preparazione della prima versione di un generatore di eventi Monte Carlo, BABAYAGA, ormai largamente utilizzato a DAΦNE, CESR, VEPP-2M. Questo programma è stato migliorato nel 2005 includendo contributi teorici assenti nella versione originale e necessari per raggiungere l'accuratezza oggi richiesta. Si è, quindi, reso opportuno validare il nuovo codice per verificare che lo scopo sia stato effettivamente raggiunto. L'incertezza del calcolo teorico è, infatti, la principale fonte di errore nella deter-

minazione della luminosità, essendo attualmente superiore a quella sperimentale. L'obiettivo da raggiungere è quello un errore relativo che si aggiri attorno all'1‰.

Nelle prossime pagine si discuterà delle basi teoriche da cui si è partiti per affrontare il problema e della soluzione che si è proposta, basata essenzialmente sull'utilizzo di un algoritmo Monte Carlo, alla cui formulazione si è pervenuti adattando in QED alcuni risultati noti in QCD, le equazioni di Altarelli-Parisi. In particolare, il primo capitolo è dedicato all'esposizione delle motivazioni del lavoro. Si partirà dalla definizione formale di R e dall'illustrazione dei principali approcci sperimentali adottati per misurare questa quantità, con particolare riferimento alla tecnica del ritorno radiativo, per poi spiegare come da R si possono ottenere informazioni sulla costante di accoppiamento elettromagnetica e sul momento magnetico anomalo del muone. Questo porterà a comprendere la necessità di una valutazione precisa della luminosità e dell'utilità del calcolo di precisione del processo Bhabha, la cui sezione d'urto in approssimazione di Born è presentata in un ultimo paragrafo.

Il secondo capitolo è dedicato alla discussione dei principali risultati della teoria delle correzioni radiative, partendo dalla Bremsstrahlung in approssimazione sofficie, per poi passare ad un'estesa presentazione delle equazioni di Altarelli-Parisi applicate all'elettrodinamica quantistica. La loro risoluzione può essere effettuata con un metodo chiamato Parton Shower che, per le sue caratteristiche di ricorsività, si presta bene ad essere realizzato al calcolatore mediante un algoritmo Monte Carlo. In conclusione sarà, quindi, dedicato ampio spazio a questo sistema e ai suoi vantaggi.

Nel capitolo 3 fa la sua apparizione BABAYAGA. Sarà illustrata per prima la sua versione originale, anche se l'oggetto di analisi del presente lavoro è stata, come già detto, una versione migliorata del programma. Questa in più comprende i risultati $\mathcal{O}(\alpha)$ esatti, noti in letteratura, che precedentemente non erano considerati. Sarà quindi mostrato il metodo originale seguito per includere gli elementi di matrice del processo Bhabha a questo ordine nel Parton Shower.

Il quarto ed ultimo capitolo è dedicato ai risultati numerici. Si è fatto ampio uso delle risorse informatiche messe a disposizione dalla Sezione INFN e dal Dipartimento, in particolare del cluster Beowulf. La flessibilità di BABAYAGA è stata sfruttata per calcolare la sezione d'urto in quattro configurazioni dei dati in ingresso, scelte in modo tale da ricondursi alle condizioni sperimentali tipiche delle flavour factory per la misura della luminosità. La simulazione del processo Bhabha si è effettuata con diversi gradi di approssimazione, allo scopo di valutare la gerarchia dei vari contributi che la compongono e determinare la loro incidenza relativa. Questa operazione ha avuto lo scopo di stimare il livello di accuratezza raggiunto dal generatore di eventi e confrontarlo con quello richiesto.

Capitolo 1

Misura di R e luminosità

Questo primo capitolo è dedicato alla definizione del rapporto R e all'illustrazione dei principali metodi sperimentali oggi utilizzati per la sua misura. Verranno, quindi, mostrati i principali parametri del Modello Standard calcolabili per mezzo di questa quantità. In ultimo sarà spiegata l'importanza di una valutazione precisa della luminosità, come conseguenza di quanto esposto precedentemente, e sarà sviluppato il calcolo esplicito della sezione d'urto Born del processo Bhabha.

1.1 Il rapporto R e suoi metodi di misura

Uno degli obiettivi dell'attuale ricerca in fisica delle alte energie è la determinazione del rapporto:

$$(1.1) \quad R(s) \equiv \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{adroni}}(s)}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s)}.$$

Le motivazioni per cui tale quantità riveste particolare importanza sono brevemente illustrate nel paragrafo 1.2. In questo paragrafo, invece, si intende dare un'idea dei metodi utilizzati per valutare sperimentalmente $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{adroni}}$.

Gli acceleratori utilizzati vengono usualmente chiamati flavour factory perché vi si producono con elevata statistica stati legati di quark u, d, c, s e b. Le energie tipiche per queste macchine sono approssimativamente comprese tra 0.5 GeV e 10 GeV e le strategie sperimentali utilizzate possono essere grosso modo classificate in due tipologie. Alcuni acceleratori lavorano ad un'energia nel centro di massa prefissata e praticano una misura diretta di R da quei processi che prevedono nello stato finale solamente adroni. A BEPC (Pechino, Cina), CESR (Cornell University, Ithaca, USA), VEPP-2M (Novosibirsk, Russia), la sezione d'urto $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{adroni}}$ viene misurata mediante la tecnica dell'“energy scan”.

Un altro e differente sistema è utilizzato a DAΦNE, presso i Laboratori Nazionali di Frascati dell'INFN, che opera ad un'energia nel centro di massa di circa 1.02 GeV. L'esperimento attualmente operativo è KLOE (figura 1.1), il cui detector è formato sostanzialmente da una camera di deriva ad alta risoluzione ($\frac{\sigma_{p_\perp}}{p_\perp} \leq 0.4\%$) e da un calorimetro elettromagnetico con risoluzione $\frac{\sigma_E}{E} = \frac{5.7\%}{\sqrt{E(\text{GeV})}}$. L'analisi viene effettuata su quegli eventi in cui gli adroni ($\pi^+\pi^-$) vengono emessi con angolo polare ϑ_π compreso tra 50 e 130 gradi ([3]).

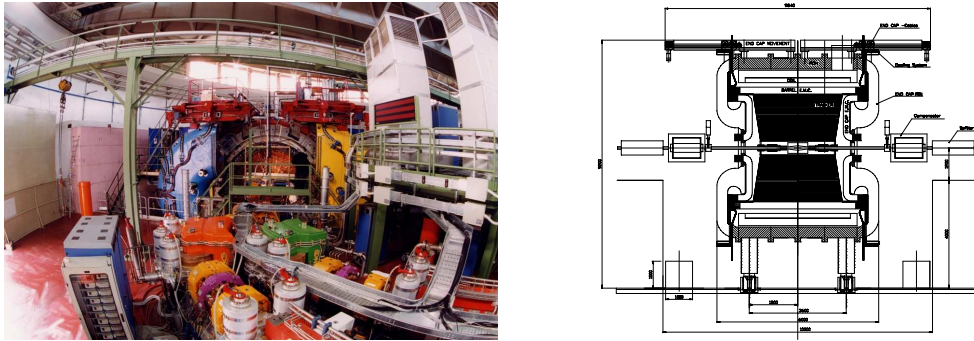


Figura 1.1: Esperimento KLOE presso DAΦNE (<http://www.lnf.infn.it/kloe>).

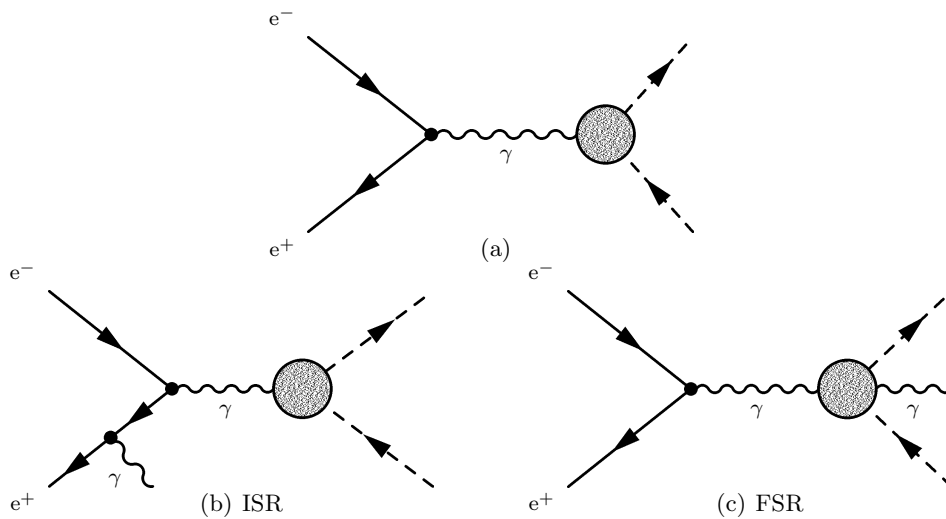


Figura 1.2: Diagrammi di Feynman del processo $e^+e^- \rightarrow$ adroni con contributi radiativi di stato iniziale (1.2(b)) e di stato finale (1.2(c)).

A DAΦNE, ma anche alle b-factory, come PEP-II (SLAC, Stanford University, USA) e KEK-B (Giappone), si procede con il metodo del ritorno radiativo ([4, 5]), in cui non si prendono in considerazione solo i processi di figura 1.2(a), ma anche tutti quelli in cui vi è emissione di fotone. Questi, in particolare, sono di due tipi: vi può essere radiazione dagli stati iniziali (ISR, figura 1.2(b)), oppure dagli stati finali (FSR, figura 1.2(c)), ma solo la prima è di interesse, perché il suo contributo è dominante. Il vantaggio insito nell'osservare una classe più ampia di eventi sta nel fatto che, mentre la macchina opera ad un'energia nel centro di massa e^+e^- prefissata, l'emissione di fotoni riduce la massa invariante del sistema adronico. In questo modo è possibile ampliare lo studio alle risonanze diverse da quella "nominale" dell'acceleratore (la Φ nel caso di DAΦNE), aventi \sqrt{s} inferiore (si veda a tal proposito figura 1.3). Accorgimenti particolari vanno, poi, utilizzati in fase di analisi dei dati per estrarre dalla sezione d'urto $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{adroni} + \gamma}$ quella di effettivo interesse

$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{adroni}}$. Queste sono, in generale, legate dalla relazione ([6]):

$$s \frac{d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{adroni}+\gamma}}{ds} = H(s) \sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{adroni}},$$

dove s è il quadrato della massa invariante del sistema adronico e $H(s)$ è il radiatore che descrive l'emissione di fotoni.

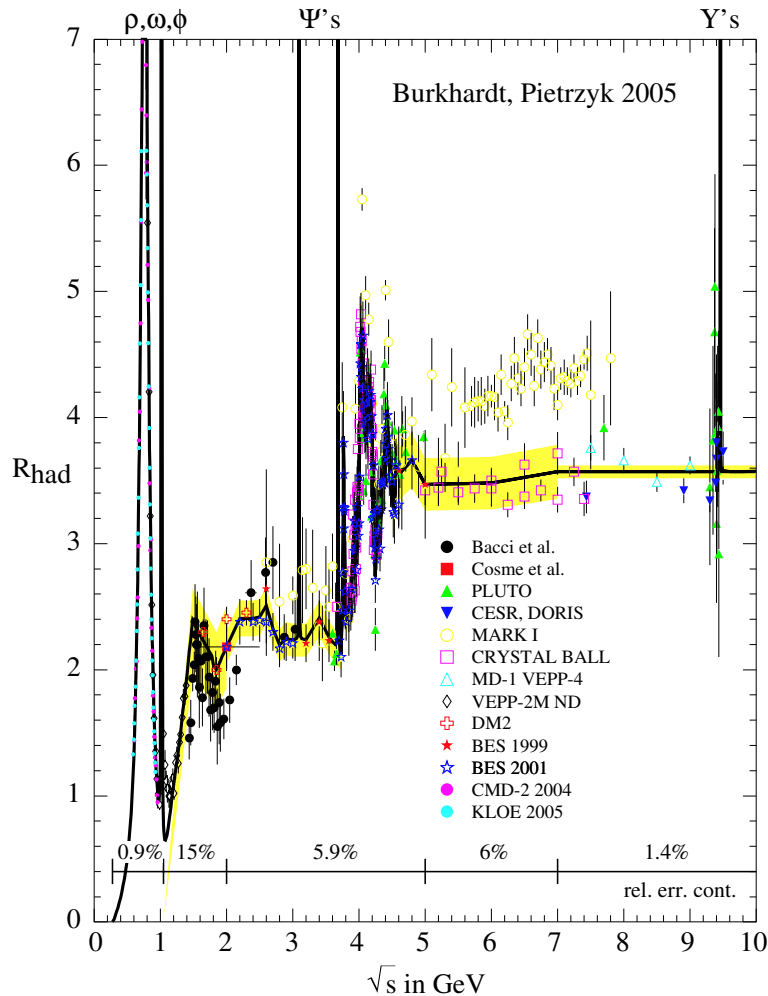


Figura 1.3: Spettro di R con risonanze (da [7]).

1.2 Parametri del Modello Standard e rapporto R

Uno dei più importanti parametri del Modello Standard è la costante di accoppiamento elettromagnetica che, alla scala \sqrt{s} , è data dalla costante di struttura fine risommata:

$$\alpha(s) = \frac{\alpha}{1 - \Delta\alpha(s)},$$

dove

$$(1.2) \quad \Delta\alpha(s) = \Pi_\gamma'(s) - \Pi_\gamma'(0),$$

con $\Pi_\gamma'(s)$ funzione di polarizzazione del vuoto o self-energia del fotone. In teoria delle perturbazioni la (1.2) si scrive:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \Delta\alpha(s) &= \sum_f \text{diagramma} = \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f Q_f^2 N_{cf} \left(\ln \frac{s}{m_f^2} - \frac{5}{3} \right) = \\ &= \Delta\alpha_\ell + \Delta\alpha_{\text{quark}}^{(5)} + \Delta\alpha_{\text{top}} \end{aligned}$$

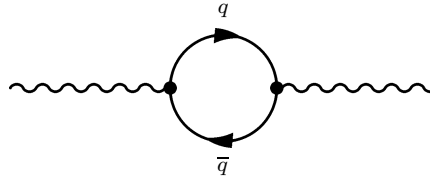


Figura 1.4: Polarizzazione del vuoto in quark.

La (1.3), tuttavia, presenta un problema. Infatti, mentre la determinazione dei contributi $\Delta\alpha_\ell$ e $\Delta\alpha_{\text{top}}$ non presenta particolari problemi (per i dettagli si vedano [8, 9, 10]), i contributi di figura 1.4 non sono calcolabili, perché la Cromodinamica Quantistica non è affidabile a basse energie, dunque le masse dei quark leggeri non sono ben definite. Il problema si risolve facendo uso della relazione di dispersione:

$$\text{Re} [\Pi_\gamma'(s) - \Pi_\gamma'(0)] = \frac{s}{\pi} \text{Re} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{\text{Im} \Pi_\gamma'(s')}{s'(s' - s - i\epsilon)}.$$

Dal teorema ottico si ha:

$$\text{Im} \Pi_\gamma'(s) = \frac{s}{e^2} \sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{adroni}}(s).$$

Facendo uso della (1.1) e ricordando che, a livello albero, $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$, in definitiva si ha:

$$\Delta\alpha_{\text{quark}}^{(5)}(s) \rightarrow \Delta\alpha_{\text{adroni}}^{(5)}(s) = -\frac{\alpha s}{3\pi} \text{Re} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds' \frac{R(s')}{s'(s' - s - i\epsilon)}.$$

Il momento magnetico anomalo del muone a_μ è un'altra quantità che si può calcolare in termini di $R(s)$. Analogamente al caso della costante di accoppiamento, i contributi derivanti dalla creazione e dal successivo riassorbimento di particelle fortemente interagenti (vedi figura 1.5) non possono essere calcolati con l'aiuto della cromodinamica quantistica perturbativa. Si può, tuttavia, usare ancora la relazione di dispersione:

$$a_\mu^{\text{adroni}} = \left(\frac{\alpha m_\mu}{3\pi} \right)^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds \frac{R(s) \hat{K}(s)}{s^2},$$

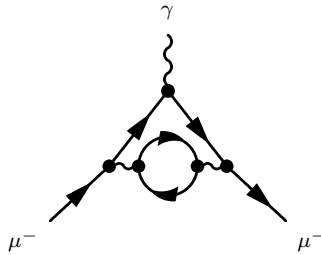


Figura 1.5: Contributo da particelle fortemente interagenti al momento magnetico anomalo del muone.

dove il kernel $\hat{K}(s)$ è una funzione limitata e monotona crescente tra 0.63 alla soglia $s = 4m_\pi^2$ e 1 per $s \rightarrow \infty$.

Risulta, così, evidente l'importanza di una determinazione sperimentale il più possibile precisa del rapporto definito dalla (1.1), in quanto sta alla base di alcune tra le più importanti verifiche del Modello Standard elettrodebole.

1.3 Determinazione della luminosità e processo Bhabha

La luminosità (o normalizzazione) L dell'apparato sperimentale è il coefficiente che lega il numero N di eventi osservati alla sezione d'urto σ del processo studiato:

$$(1.4) \quad N = L\sigma.$$

Il linea di massima questo parametro può essere calcolato conoscendo le caratteristiche della macchina acceleratrice e dei rivelatori; tuttavia, procedendo in questo modo, si giunge ad un risultato piuttosto impreciso. Le misure sperimentali più precise richiedono, invece, di conoscere la luminosità con un errore dell'ordine dello 0.1% o inferiore.

Alternativamente è possibile procedere invertendo la (1.4) e sostituendo a σ (sperimentale) la sezione d'urto teorica di un processo ben conosciuto e sperimentalmente misurabile con elevata accuratezza:

$$L = \frac{N}{\sigma_{\text{teor}}}.$$

Particolarmente adatto a questo scopo risulta essere il Bhabha scattering ([11]), studiato grandi angoli, e non a piccoli come veniva fatto a LEP, sia per motivi legati alla realizzazione sperimentale, sia grazie alla trascurabilità dei processi deboli a bassa energia. La sua sezione d'urto teorica risulta, poi, essere ben quantificabile, nonché elevata, alle energie tipiche delle flavour factory. Occorre anche ricordare che elettroni e positroni sono particelle facilmente rilevabili.

Si indica con Bhabha scattering il processo di diffusione elastica

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-.$$

All'elemento di matrice \mathcal{M} contribuiscono i diagrammi di figura 1.6(a) e di figura 1.6(b):

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b.$$

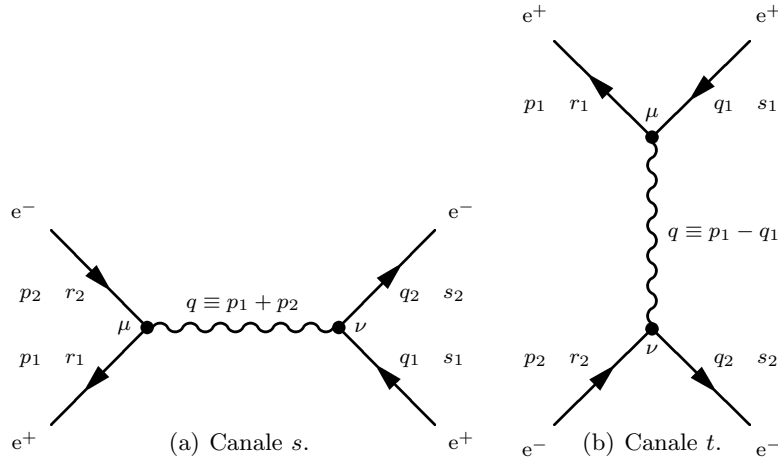


Figura 1.6: Diagrammi di Feynman del processo Bhabha.

Applicando le regole di Feynman si ottiene:

$$(1.5a) \quad \mathcal{M}_a = \frac{ie^2}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(q_2, s_2) \gamma_\mu v(q_1, s_1) \bar{v}(p_1, r_1) \gamma^\mu u(p_2, r_2),$$

per il processo in canale s , e

$$(1.5b) \quad \mathcal{M}_b = \frac{-ie^2}{(p_1 - q_1)^2} \bar{u}(q_2, s_2) \gamma_\mu u(p_2, r_2) \bar{v}(p_1, r_1) \gamma^\mu v(q_1, s_1),$$

per il processo in canale t .

Il modulo quadro di \mathcal{M} , mediato sulle polarizzazioni degli stati iniziali e sommato su quelle degli stati finali, ha la forma:

$$|\widetilde{\mathcal{M}}|^2 \equiv \frac{1}{4} \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} |\mathcal{M}|^2 = |\widetilde{\mathcal{M}}_a|^2 + |\widetilde{\mathcal{M}}_b|^2 + \widetilde{\mathcal{M}}_{ab} + \widetilde{\mathcal{M}}_{ab}^*,$$

dove si è definito $\widetilde{\mathcal{M}}_{ab} \equiv \frac{1}{4} \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^\dagger$. Utilizzando la (1.5a), la (1.5b) e ricordando le relazioni di completezza per le soluzioni dell'equazione di Dirac si ha immediatamente:

$$(1.6a) \quad \begin{aligned} |\widetilde{\mathcal{M}}_a|^2 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \text{Tr} \left(\gamma^\nu \frac{\not{p}_1 - m_e}{2m_e} \gamma^\mu \frac{\not{p}_2 + m_e}{2m_e} \right) \text{Tr} \left(\gamma_\nu \frac{\not{q}_1 + m_e}{2m_e} \gamma_\mu \frac{\not{q}_2 - m_e}{2m_e} \right) \approx \\ &\approx \frac{2\pi^2 \alpha^2}{m_e^4} \frac{t^2 + u^2}{s^2}, \end{aligned}$$

$$(1.6b) \quad \begin{aligned} |\widetilde{\mathcal{M}}_b|^2 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{(p_1 - q_1)^4} \text{Tr} \left(\gamma^\nu \frac{\not{p}_1 - m_e}{2m_e} \gamma^\mu \frac{\not{q}_1 - m_e}{2m_e} \right) \text{Tr} \left(\gamma_\nu \frac{\not{q}_2 + m_e}{2m_e} \gamma_\mu \frac{\not{p}_2 + m_e}{2m_e} \right) \approx \\ &\approx \frac{2\pi^2 \alpha^2}{m_e^4} \frac{u^2 + s^2}{t^2}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio di entrambe le equazioni ci si è posti nel limite ultrarelativistico per trascurare le masse al numeratore, e

$$(1.6c) \quad \begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{ab} &= \frac{1}{4} \frac{-e^4}{(p_1 + p_2)^2 (p_1 - q_1)^2} \text{Tr} \left(\frac{\not{q}_2 + m_e}{2m_e} \gamma_\mu \frac{\not{q}_1 - m_e}{2m_e} \gamma_\nu \frac{\not{p}_1 - m_e}{2m_e} \gamma_\mu \frac{\not{p}_2 + m_e}{2m_e} \gamma_\nu \right) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{-e^4}{(p_1 + p_2)^2 (p_1 - q_1)^2} \text{Tr} \left(\frac{\not{q}_2 + m_e}{2m_e} \gamma_\mu \frac{\not{p}_2 + m_e}{2m_e} \gamma_\nu \frac{\not{p}_1 - m_e}{2m_e} \gamma_\mu \frac{\not{q}_1 - m_e}{2m_e} \gamma_\nu \right). \end{aligned}$$

Il calcolo esplicito della (1.6c) si può semplificare se si utilizzano le identità di contrazione per le matrici γ . Il risultato finale è:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{ab} \approx \frac{2\pi^2 \alpha^2 u^2}{m_e^4 ts}$$

La sezione d'urto differenziale nel centro di massa per il Bhabha scattering ha, dunque, la forma:

$$(1.7) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{u^2 + s^2}{t^2} + 2\frac{u^2}{ts} \right).$$

Si fissi, ora, la cinematica:

$$\begin{cases} p_1 = (E, 0, 0, E) \\ p_2 = (E, 0, 0, -E) \\ q_1 = (E, 0, E \sin \vartheta, E \cos \vartheta) \\ q_2 = (E, 0, -E \sin \vartheta, -E \cos \vartheta). \end{cases}$$

Di conseguenza gli invarianti cinematici di Mandelstam sono:

$$\begin{cases} s = 4E^2 \\ t = -2E^2 (1 - \cos \vartheta) \\ u = -2E^2 (1 + \cos \vartheta) \end{cases}$$

e la (1.7) si riscrive:

$$(1.8) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left(\underbrace{\frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2}}_s + \underbrace{\frac{\cos^4 \frac{\vartheta}{2} + 1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}}_t - \underbrace{\frac{2 \cos^4 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}}_{st} \right).$$

Dalla (1.8) risulta evidente che a piccoli angoli di diffusione ($\vartheta \approx 0$) il termine t relativo allo scambio di un fotone tra positrone ed elettrone è dominante su quello di annichilazione s e su quello di interferenza tra i due diagrammi st (vedi figura 1.7). Questo fatto si riflette in un comportamento divergente per la sezione d'urto nel limite $\vartheta \rightarrow 0$.

Vale la pena notare che per energie nel centro di massa dell'ordine di 10 GeV, tipiche delle cosiddette B-factories, gli effetti di natura debole sulla sezione d'urto Bhabha dovuti allo scambio di un bosone Z^0 non sono trascurabili alla scala dello 0.1% e vanno, pertanto, tenuti in considerazione. Il contributo dominante in questi casi è dato dall'interferenza $[Z^0(s), \gamma(t)]$ tra il diagramma di Feynman corrispondente allo scambio di uno Z^0 in canale s e quello di scambio di un fotone in canale t .

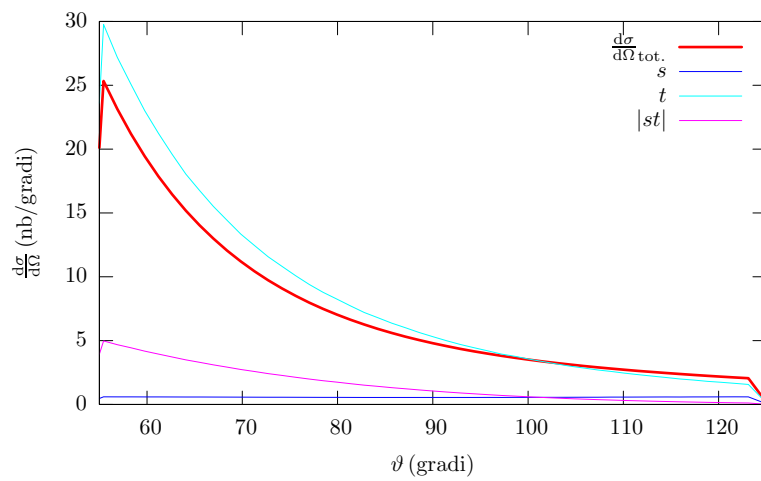


Figura 1.7: Contributi s , t e st alla sezione d'urto differenziale del processo Bhabha.

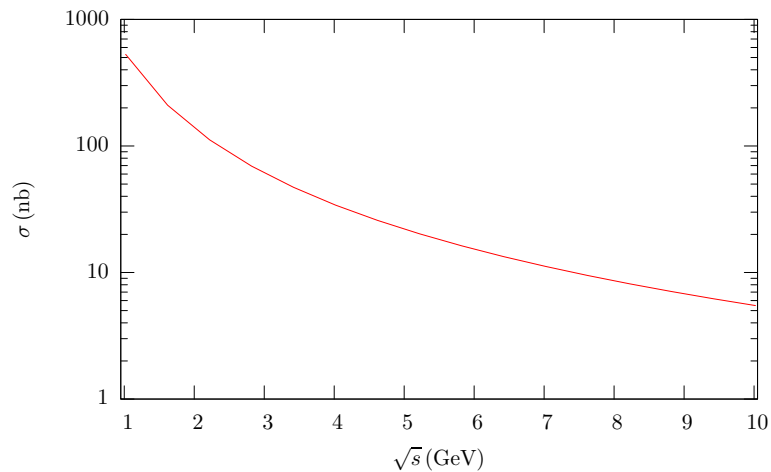


Figura 1.8: Andamento della sezione d'urto Bhabha totale (integrata su angoli di diffusione compresi tra 55 e 125 gradi) in funzione dell'energia nel centro di massa.

Capitolo 2

Correzioni radiative di QED e Parton Shower

In questo capitolo verranno presentati gli aspetti teorici delle correzioni radiative di QED alla teoria perturbativa. In primo luogo si procederà con lo studio di un processo di annichilazione fermionica con emissione di un fotone reale dagli stati iniziali. Si mostrerà, in particolare, l'insorgenza del problema della divergenza infrarossa e il metodo per cancellarla. In seguito, dopo aver illustrato la possibilità di operare una particolare fattorizzazione della sezione d'urto, si introdurrà un approccio alternativo alle correzioni radiative dominanti che, partendo da una cinematica approssimata, porterà a scrivere delle equazioni integro-differenziali per la cosiddetta funzione di struttura dell'elettrone (equazioni di Altarelli-Parisi). In ultimo si presenteranno le principali tecniche risolutive per questa equazione, concentrandosi, in particolare, su quella denominata Parton Shower e basata sul metodo Monte Carlo.

2.1 Singolarità collineari e infrarosse

Un tipico esempio di correzione radiativa è quello in cui, in un generico processo di annichilazione

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \ell^+\ell^-$$

preso all'ordine più basso di approssimazione, si considera anche l'emissione di fotoni dagli stati iniziali, la cosiddetta Bremsstrahlung¹. I diagrammi di Feynman che contribuiscono alla sezione d'urto sono quelli in figura 2.1.

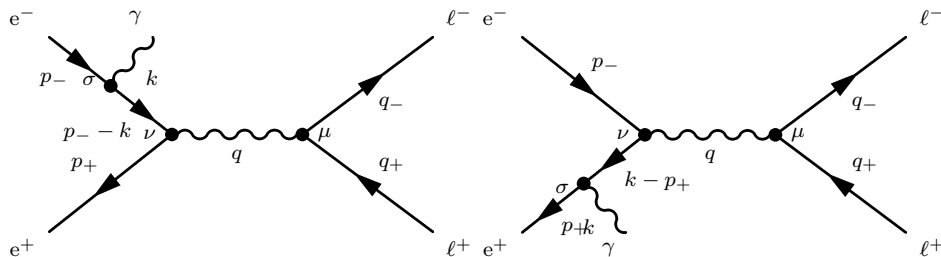


Figura 2.1: Diagrammi di Bremsstrahlung.

¹Dal tedesco: *Bremse* (freno) + *Strahlung* (radiazione). Letteralmente: *radiazione di frenamento*

L'elemento di matrice \mathcal{M}_B risulta, dunque, uguale alla somma dei due contributi:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(1)} &= \bar{u}(q_-) (-ie\gamma^\mu) v(q_+) \left(-i\frac{g_{\nu\mu}}{q^2} \right) \bar{v}(p_+) (-ie\gamma^\nu) \\ &\quad \left(i\frac{\not{p}_- - \not{k} + m}{-2p_- \cdot k} \right) (-ie\gamma^\sigma) u(p_-) \varepsilon_\sigma(k) = \\ &= i\frac{(-ie)^3}{q^2} \bar{u}(q_-) \gamma^\mu v(q_+) \bar{v}(p_+) \gamma_\mu \frac{\not{p}_- - \not{k} + m}{-2p_- \cdot k} \gamma^\sigma u(p_-) \varepsilon_\sigma(k)\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{M}^{(2)} = i\frac{(-ie)^3}{q^2} \bar{u}(q_-) \gamma^\mu v(q_+) \bar{v}(p_+) \gamma^\sigma \frac{-\not{p}_+ + \not{k} + m}{-2p_+ \cdot k} \gamma_\mu u(p_-) \varepsilon_\sigma(k).$$

Si ha, quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_B = \mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} &= i\frac{(-ie)^3}{q^2} \bar{u}(q_-) \gamma^\mu v(q_+) \bar{v}(p_+) \\ &\quad \left[\gamma_\mu \frac{\not{p}_- - \not{k} + m}{-2p_- \cdot k} \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \frac{-\not{p}_+ + \not{k} + m}{-2p_+ \cdot k} \gamma_\mu \right] u(p_-) \varepsilon_\sigma(k).\end{aligned}$$

Si considerino, ora, separatamente gli addendi del termine tra parentesi quadre e si sviluppino:

$$\begin{aligned}\frac{\not{p}_-}{-2p_- \cdot k} \gamma^\sigma u(p_-) \varepsilon_\sigma(k) &= \frac{p_{-\rho}}{-2p_- \cdot k} \gamma^\rho \gamma^\sigma u(p_-) \varepsilon_\sigma(k) = \\ &= \frac{1}{-2p_- \cdot k} (2g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho) p_{-\rho} u(p_-) \varepsilon_\sigma(k) = \\ &= \frac{1}{-2p_- \cdot k} (2\varepsilon(k) \cdot p_-) u(p_-) = \\ &= -\frac{\varepsilon(k) \cdot p_-}{p_- \cdot k} u(p_-)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{v}(p_+) \gamma^\sigma \frac{\not{p}_+}{2p_+ \cdot k} \varepsilon_\sigma(k) &= \bar{v}(p_+) \gamma^\sigma \gamma^\rho \frac{p_{+\rho}}{2p_+ \cdot k} = \\ &= \bar{v}(p_+) (g^{\sigma\rho} - \gamma^\rho \gamma^\sigma) \frac{p_{+\rho}}{2p_+ \cdot k} \varepsilon_\sigma(k) = \\ &= \bar{v}(p_+) (\varepsilon(k) \cdot p_+) \frac{1}{2p_+ \cdot k} = \\ &= \bar{v}(p_+) \frac{\varepsilon(k) \cdot p_+}{p_+ \cdot k}.\end{aligned}$$

In entrambi i casi si è fatto uso dell'equazione di Dirac, considerando anche che ci si pone nel limite ultrarelativistico per cui le masse degli elettroni sono trascurabili. Si

ottiene, infine:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_B &= \mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} = -i \frac{(-ie)^3}{q^2} \bar{u}(q_-) \gamma^\mu v(q_+) \bar{v}(p_+) \gamma_\mu u(p_-) \\
 (2.1) \quad & \left[-\frac{\varepsilon(k) \cdot p_-}{p_- \cdot k} + \frac{\varepsilon(k) \cdot p_+}{p_+ \cdot k} \right] = \\
 & = -\mathcal{M}_0 e \varepsilon_\mu(k) \underbrace{\left[-\frac{p_-^\mu}{p_- \cdot k} + \frac{p_+^\mu}{p_+ \cdot k} \right]}_{j^\mu(k)},
 \end{aligned}$$

dove \mathcal{M}_0 è l'elemento di matrice del processo al livello di Born.

Nella (2.1) si è definita la corrente iconale $j^\mu(k)$, che soddisfa la relazione:

$$k_\mu j^\mu(k) = \left[-\frac{k \cdot p_-}{p_- \cdot k} + \frac{k \cdot p_+}{p_+ \cdot k} \right] = 0.$$

Passando dallo spazio dei momenti a quello delle posizioni con una trasformata di Fourier si verifica, così, che la corrente iconale è conservata:

$$\partial_\mu \tilde{j}^\mu(x) = 0.$$

I diagrammi di figura 2.1 costituiscono, dunque, un sottoinsieme gauge-invariante dell'intero insieme dei diagrammi di correzione radiativa.

Il modulo quadro dell'elemento di matrice è:

$$|\mathcal{M}_B|^2 = |\mathcal{M}_0|^2 e^2 \varepsilon_\mu(k) j^\mu(k) \varepsilon_\nu(k) j^\nu(k).$$

Per sommare sulle polarizzazioni si possono utilizzare le relazioni di completezza:

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_\mu(k, \lambda) \varepsilon_\nu(k, \lambda) = -g_{\mu\nu},$$

giungendo, quindi, a scrivere:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad \widetilde{|\mathcal{M}_B|^2} &= -\widetilde{|\mathcal{M}_0|^2} e^2 j^\mu(k) j_\mu(k) = \\
 &= \widetilde{|\mathcal{M}_0|^2} \left[\frac{m_e^2}{(p_- \cdot k)^2} + \frac{m_e^2}{(p_+ \cdot k)^2} - \frac{2p_- \cdot p_+}{(p_- \cdot k)(p_+ \cdot k)} \right].
 \end{aligned}$$

La sezione d'urto differenziale si ricava inserendo la (2.2) nell'espressione:

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_+ + q_- + k - p_+ - p_-) \frac{\widetilde{|\mathcal{M}_B|^2}}{4p_+ \cdot p_-} \times \\
 &\times \frac{d^3\mathbf{q}_+}{2E_+(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{q}_-}{2E_-(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_\gamma(2\pi)^3}
 \end{aligned}$$

(per sapere come si giunge a questa relazione si veda [12]), da cui discende:

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad d\sigma &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 e^2 \left[\frac{2p_- \cdot p_+}{(p_- \cdot k)(p_+ \cdot k)} - \frac{m_e^2}{(p_- \cdot k)^2} - \frac{m_e^2}{(p_+ \cdot k)^2} \right] \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_\gamma(2\pi)^3} = \\
 &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{2p_- \cdot p_+}{(p_- \cdot k)(p_+ \cdot k)} - \frac{m_e^2}{(p_- \cdot k)^2} - \frac{m_e^2}{(p_+ \cdot k)^2} \right] E_\gamma dE_\gamma d\cos\vartheta_\gamma,
 \end{aligned}$$

dove si è utilizzato:

$$d^3\mathbf{k} = E_\gamma^2 dE_\gamma d\cos\vartheta_\gamma d\phi_\gamma.$$

e si è integrato su $d\phi_\gamma$. In altre parole, l'approssimazione di Born viene corretta da un opportuno coefficiente al prim'ordine in α .

Per studiare la cinematica del processo è opportuno fissare:

$$\begin{cases} p_- = (E, 0, 0, \beta E) \\ p_+ = (E, 0, 0, -\beta E) \\ k = (E_\gamma, E_\gamma \sin\vartheta_\gamma \cos\phi_\gamma, E_\gamma \sin\vartheta_\gamma \sin\phi_\gamma, E_\gamma \cos\vartheta_\gamma) , \end{cases}$$

con $\beta \equiv \left(1 - \frac{m_e^2}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. I prodotti scalari di interesse sono:

$$p_+ \cdot p_- = E_+ E_- - \mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_- = E^2 + \beta^2 E^2 = E^2 (1 + \beta^2) \approx 2E^2,$$

$$p_- \cdot k = EE_\gamma - \beta EE_\gamma \cos\vartheta_\gamma = EE_\gamma (1 - \beta \cos\vartheta_\gamma)$$

e

$$p_+ \cdot k = EE_\gamma + \beta EE_\gamma \cos\vartheta_\gamma = EE_\gamma (1 + \beta \cos\vartheta_\gamma)$$

Sostituendo questi risultati nella (2.3) si giunge a:

$$(2.5) \quad \frac{d^2\sigma}{dE_\gamma d\cos\vartheta_\gamma} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{E_\gamma} \left[\frac{4}{(1 + \beta \cos\vartheta_\gamma)(1 - \beta \cos\vartheta_\gamma)} + \right. \\ \left. - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos\vartheta_\gamma)^2} - \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos\vartheta_\gamma)^2} \right].$$

Per $\beta = 1$ (cioè per fermioni carichi a massa nulla) la sezione d'urto differenziale diverge per $\vartheta_\gamma = 0$ o per $\vartheta_\gamma = \pi$. Questa divergenza è, pertanto, detta collineare. Per $\beta \neq 1$ non c'è una vera e propria divergenza, ma la sezione d'urto differenziale cresce comunque all'approssimarsi di ϑ_γ a 0 e a π . Un'altra singolarità (non integrabile) è quella che si ha per $E_\gamma = 0$, viene detta infrarossa e per la sua trattazione si rimanda al paragrafo successivo.

Per procedere all'integrazione della (2.5) su ϑ_γ si calcoli innanzi tutto ($c \equiv \cos\vartheta_\gamma$):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} dc \frac{1}{(1 - \beta c)(1 + \beta c)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dc \frac{1}{1 - \beta c} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dc \frac{1}{1 + \beta c} = \\ &= -\frac{1}{2\beta} [\ln(1 - \beta c)]_{-1}^{+1} + \frac{1}{2\beta} [\ln(1 + \beta c)]_{-1}^{+1} = \\ &= \frac{1}{2\beta} \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) - \frac{1}{2\beta} \ln\left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right) = \\ &= \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right). \end{aligned}$$

Gli altri integrali sono:

$$\int_{-1}^{+1} dc \frac{1}{(1 \mp \beta c)^2} = \pm \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{1 \mp \beta c} \right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{1 - \beta^2}.$$

Si sviluppi, poi:

$$\beta = \left(1 - \frac{m_e^2}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{m_e^2}{E^2} + \dots$$

Effettuando le sostituzioni, valide nel limite ultrarelativistico $\beta \approx 1$, si ha:

$$(2.6) \quad \frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \sigma_0 \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{E_\gamma} (L - 1) ,$$

dove $L \equiv \ln \frac{s}{m_e^2}$ è detto logaritmo collineare.

2.2 Cancellazione infrarossa

Come si accennava nel paragrafo precedente, la divergenza infrarossa nella (2.6) non è integrabile sullo spettro dell'energia. Infatti:

$$\sigma_B(s) \equiv \int_0^E dE_\gamma \frac{d\sigma}{dE_\gamma} \propto [\ln E_\gamma]_0^E .$$

Il problema è aggirabile a patto di dare una definizione fenomenologicamente corretta di evento elastico. Questo, infatti, nella realtà non è dato soltanto dal processo

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \ell^+\ell^-$$

all'ordine più basso, ma anche da quei processi (detti di Bremsstrahlung elastica) per cui l'energia dei fotoni emessi si trova ad essere inferiore alla risoluzione (finita) dell'apparato sperimentale (fotoni sotto-soglia). In altre parole vanno considerati tutti i processi del tipo

$$e^+e^- \rightarrow \ell^+\ell^- + (\gamma)$$

con $E_\gamma < \Delta E$, dove ΔE è l'energia minima rilevabile. In termini di sezione d'urto:

$$\sigma_{\text{elast.}}(s) = \sigma_0(s) + \sigma_B(s; E_\gamma < \Delta E) .$$

L'integrazione della (2.6) può avvenire, quindi, tra un opportuno cut-off λ , che verrà poi fatto tendere a zero al termine dei calcoli, e ΔE . Risulta, dunque:

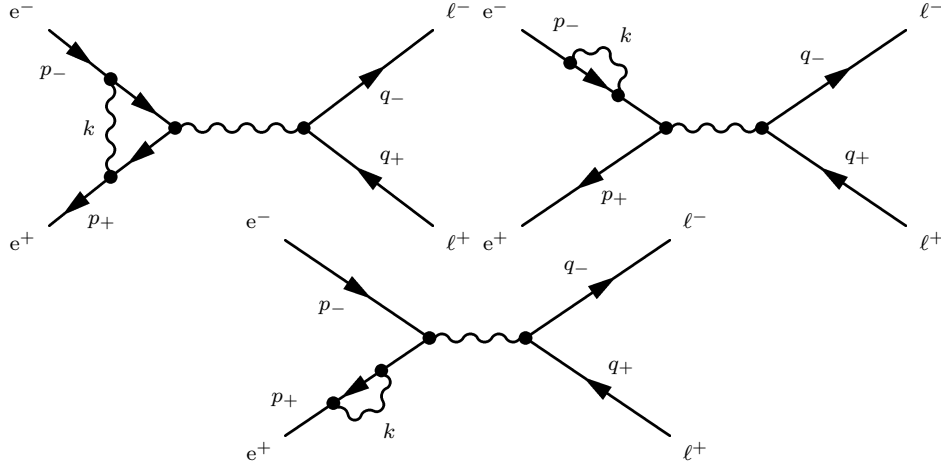
$$\sigma_B \propto (L - 1) \ln \frac{\Delta E}{\lambda}$$

Se, ora, si considera che i diagrammi con emissione di un fotone virtuale di figura 2.2 contribuiscono allo stesso ordine della Bremsstrahlung elastica, si può eliminare il parametro λ . Si ha, infatti:

$$\sigma_{\text{virt.}}(s) \propto -(L - 1) \ln \frac{E}{\lambda}$$

e, di conseguenza:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{elast.}}(s) &= \sigma_0(s) + \sigma_B(s; E_\gamma < \Delta E) + \sigma_{\text{virt.}}(s) = \\ &= \sigma_0(s) \left(1 + \frac{2\alpha}{\pi} (L - 1) \ln \frac{\Delta E}{E}\right) . \end{aligned}$$


 Figura 2.2: Inserimento di fotoni virtuali nell'annichilazione e^+e^- .

$\ln \frac{\Delta E}{E}$ viene detto logaritmo infrarosso.

Il procedimento di cancellazione infrarossa non si applica solo al prim'ordine nella teoria delle perturbazioni. Si può, infatti, dimostrare che, in ogni teoria di gauge con bosoni di campo non massivi, le probabilità di transizione non presentano divergenze collineari o infrarosse, a patto che si sommino tutti gli stati iniziali e finali degeneri. Quanto fatto più sopra si estende infatti ad n fotoni reali emessi, con n arbitrario. Ne segue l'espressione della sezione d'urto esponenziata nella forma:

$$(2.7) \quad \sigma^{(\infty)}(s) = \sigma_0(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2\alpha}{\pi} (L-1) \ln \frac{\Delta E}{E} \right)^n = \sigma_0(s) \left(\frac{\Delta E}{E} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}(L-1)}.$$

2.3 Vertice di Altarelli-Parisi

Nei precedenti paragrafi ci si è posti nell'approssimazione (piuttosto restrittiva) di fotone estremamente soffice, cioè con tutte le componenti di k tendenti a 0. Ora si vuole rilassare questa condizione, mostrando che la sezione d'urto di un processo con emissione di fotone, come quello in figura 2.3(a), è ancora fattorizzabile se si considera piccola solo la componente trasversa k_{\perp} di k , ferma restando la trascurabilità rispetto al quadrimpulso dell'elettrone ([13, 14]).

Indicando con \mathcal{M} l'elemento di matrice dell'intero processo e con \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 quelli dei due sottoprocessi di figura 2.3(b) e 2.3(c) rispettivamente si vuole dimostrare che:

$$(2.8) \quad \frac{1}{2} \frac{1}{N_X} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2} |\mathcal{M}|^2 \underset{k \ll p}{\approx} \left(\frac{1}{q^2} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{s, \sigma_1, \sigma_2} |\mathcal{M}_1|^2 \right] \left[\frac{1}{2} \frac{1}{N_X} \sum_{s, \rho_1, \rho_2} |\mathcal{M}_2|^2 \right],$$

dove N_X è la molteplicità degli spin dello stato iniziale X .

Si ha:

$$\mathcal{M}_1 = \bar{u}(q, s) (-ie\gamma^\mu) u(p, \sigma_1) \varepsilon^*_{\mu}(k, \sigma_2),$$

da cui segue come al solito:

$$\frac{1}{2} \sum_{s, \sigma_1, \sigma_2} |\mathcal{M}_1|^2 = \frac{e^2}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{q}) \sum_{\sigma_2} \varepsilon^*_{\mu}(k, \sigma_2) \varepsilon_{\nu}(k, \sigma_2).$$

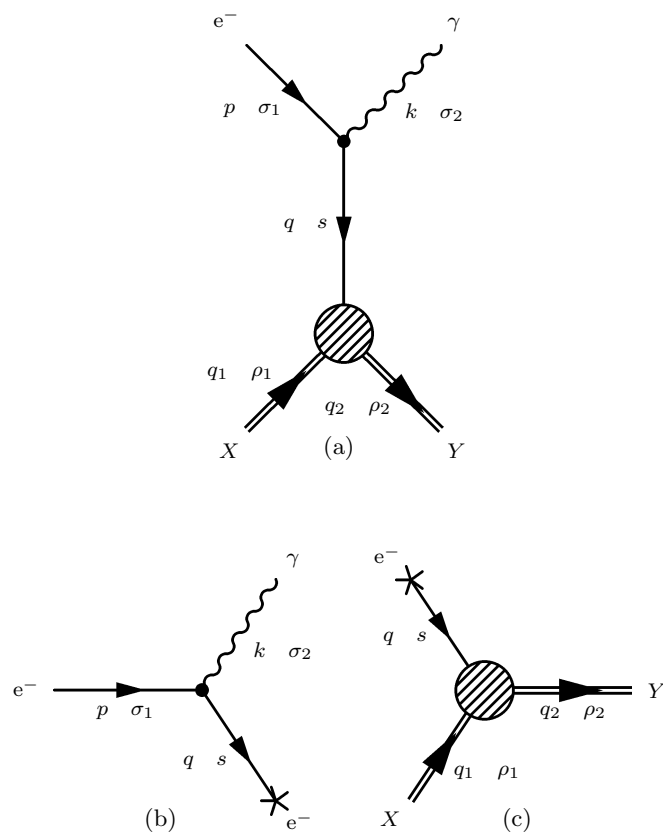


Figura 2.3: Generico processo con emissione di fotone e suoi sottoprocessi fattorizzati.

Il calcolo della traccia:

$$(2.9) \quad \text{Tr} (\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{q}) = 4 [q^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} (p \cdot q) + q^\nu p^\mu]$$

e la relazione di completezza, valida per un fotone reale ($n = (1, 0, 0, 0)$) (si veda l'Appendice A.1):

$$\sum_{\sigma_2} \varepsilon^*_\mu (k, \sigma_2) \varepsilon_\nu (k, \sigma_2) = -g_{\mu\nu} - \frac{1}{k_0^2} [k_\mu k_\nu - k_0 (k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)] ,$$

dove si è sommato sulle sole polarizzazioni trasversali e si è posto $k_0 \equiv k \cdot n$, permettono di arrivare a scrivere:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s, \sigma_1, \sigma_2} |\mathcal{M}_1|^2 &= 4 \frac{e^2}{2} [q^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} (p \cdot q) + q^\nu p^\mu] \\ &\quad \left\{ -g_{\mu\nu} - \frac{1}{k_0^2} [k_\mu k_\nu - k_0 (k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)] \right\} = \\ &= 4 \frac{e^2}{2} \left\{ - (p \cdot q) - \frac{1}{k_0^2} \{ (p \cdot k) (q \cdot k) - k_0 [(q \cdot k) p_0 + \right. \\ &\quad \left. + (p \cdot k) q_0] \} + 4 (p \cdot q) + \frac{1}{k_0^2} \{ k^2 (p \cdot q) - k_0 [(p \cdot q) k_0 + \right. \\ &\quad \left. + (p \cdot q) k_0] \} - (p \cdot q) - \frac{1}{k_0^2} \{ (p \cdot k) (q \cdot k) - k_0 [(p \cdot k) q_0 + \right. \\ &\quad \left. + (q \cdot k) p_0] \} \right\} = \\ &= 4 \frac{e^2}{k_0} [(q \cdot k) p_0 + (p \cdot k) q_0] \end{aligned}$$

con $p_0 \equiv p \cdot n$ e $q_0 \equiv q \cdot n$.

Per il diagramma di figura 2.3(c), invece, si scrive genericamente:

$$\mathcal{M}_2 = \Gamma (q_1, \rho_1; q_2, \rho_2) u (q, s) .$$

Si calcoli, ora:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \Gamma (q_1, \rho_1; q_2, \rho_2) \frac{i(\not{q} + m_e)}{q^2 - m_e^2} (-ie\gamma^\mu) u (p, \sigma_1) \varepsilon^*_\mu (k, \sigma_2) \underset{k \ll p}{\approx} \\ &\underset{k \ll p}{\approx} \Gamma (q_1, \rho_1; q_2, \rho_2) \frac{i(\not{p} + m_e)}{p^2} (-ie\gamma^\mu) u (p, \sigma_1) \varepsilon^*_\mu (k, \sigma_2) = \\ &= \frac{e}{p^2} \Gamma (q_1, \rho_1; q_2, \rho_2) 2p^\mu u (p, \sigma_1) \varepsilon^*_\mu (k, \sigma_2) , \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si sono sfruttati il commutatore delle γ e l'equazione di Dirac. Se, ancora una volta, si approssima q con p , si ha

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1, \rho_1, \rho_2} |\Gamma (q_1, \rho_1; q_2, \rho_2) u (p, \sigma_1)|^2 &\underset{k \ll p}{\approx} \sum_{s, \rho_1, \rho_1} |\Gamma (q_1, \rho_1; q_2, \rho_2) u (q, s)|^2 = \\ &= \sum_{s, \rho_1, \rho_1} |\mathcal{M}_2|^2 , \end{aligned}$$

dunque:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{N_X} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2} |\mathcal{M}|^2 \underset{k \ll p}{\approx} \left(\frac{1}{q^2} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{N_X} \sum_{s, \rho_1, \rho_2} |\mathcal{M}_2|^2 \right] \left[4e^2 \sum_{\sigma_2} p^\mu \varepsilon^*_{\mu}(k, \sigma_2) \varepsilon_{\nu}(k, \sigma_2) p^\nu \right].$$

Se si osserva che, adottando la solita approssimazione $q \approx p$ nella (2.9), si ha:

$$4p^\mu p^\nu \underset{k \ll p}{\approx} \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{p}),$$

allora la (2.8) è immediatamente dimostrata.

Utilizzando questo risultato si può passare al calcolo della sezione d'urto del processo

$$e^- + X \rightarrow \gamma + Y,$$

che ha la forma generale:

$$(2.11) \quad \sigma = \frac{1}{(1 + v_X) 2p_0 2q_{10}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \int d\Pi_Y \left(\frac{1}{q^2} \right)^2 \widetilde{|\mathcal{M}_1|^2} \widetilde{|\mathcal{M}_2|^2},$$

dove v_X è la velocità della particella relativamente al centro di massa e $d\Pi_X$ è l'elemento di spazio delle fasi delle particelle di stato finale Y . In approssimazione ultra-relativistica si può assumere la seguente cinematica:

$$(2.12) \quad \begin{cases} p = (E, 0, 0, E) \\ k = \left(zE, k_\perp, 0, zE - \frac{k_\perp^2}{2zE} \right) \\ q = p - k = \left((1-z)E, -k_\perp, 0, (1-z)E - \frac{k_\perp^2}{2(1-z)E} \right). \end{cases}$$

Il fotone deve essere “quasi” on-shell, quindi:

$$k^2 = z^2 E^2 - k_\perp^2 - z^2 E^2 + k_\perp^2 - \frac{k_\perp^4}{4z^2 E^2} \underset{\mathcal{O}(k_\perp^2)}{\approx} 0$$

e, con questa approssimazione:

$$\begin{aligned} k_3 &= \left[\left(zE - \frac{k_\perp^2}{2zE} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \underset{\mathcal{O}(k_\perp^2)}{\approx} \\ &\underset{\mathcal{O}(k_\perp^2)}{\approx} (z^2 E^2 - k_\perp^2)^{\frac{1}{2}} = \\ &= zE \left(1 - \frac{k_\perp^2}{z^2 E^2} \right)^{\frac{1}{2}} \underset{\mathcal{O}(k_\perp^2)}{\approx} \\ &\underset{\mathcal{O}(k_\perp^2)}{\approx} zE \left(1 - \frac{k_\perp^2}{2z^2 E^2} \right) \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$q_3 \underset{\mathcal{O}(k_\perp^2)}{\approx} (1-z)E - \frac{k_\perp^2}{2zE}$$

e

$$q^2 \underset{\mathcal{O}(k_\perp^2)}{\approx} -\frac{k_\perp^2}{z}.$$

Tenendo, inoltre, conto che ²

$$d^3\mathbf{k} = dzE\pi dk_\perp^2$$

la (2.11) si riscrive:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \sigma &= \int \frac{dz\pi dk_\perp^2}{16\pi^2} \frac{z(1-z)}{k_\perp^4} |\widetilde{\mathcal{M}}_1|^2 \int d\Pi_Y \frac{1}{(1+v_X)2p_02q_{10}} |\widetilde{\mathcal{M}}_2|^2 = \\ &= \int \frac{dz\pi dk_\perp^2}{16\pi^2} \frac{z(1-z)}{k_\perp^4} |\widetilde{\mathcal{M}}_1|^2 \sigma_2, \end{aligned}$$

dove con σ_2 si è indicata la sezione d'urto del processo di figura 2.3(c).

Dalla cinematica (2.12) discendono i prodotti scalari:

$$p \cdot k = \frac{k_\perp^2}{2z},$$

e

$$\begin{aligned} q \cdot k &= k_\perp^2 + \frac{zk_\perp^2}{2(1-z)} + \frac{(1-z)k_\perp^2}{2z} + \mathcal{O}(k_\perp^4) \underset{\mathcal{O}(k_\perp^2)}{\approx} \\ &\underset{\mathcal{O}(k_\perp^2)}{\approx} k_\perp^2 + \frac{zk_\perp^2}{2(1-z)} + \frac{(1-z)k_\perp^2}{2z}. \end{aligned}$$

Inoltre:

$$p \cdot n = E \equiv p_0, \quad q \cdot n = (1-z)E \equiv q_0, \quad k \cdot n = zE \equiv k_0.$$

Questi risultati si possono sostituire nella (2.10), ottenendo:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} |\widetilde{\mathcal{M}}_1|^2 &= 4\frac{e^2}{z} \left[\left(k_\perp^2 + \frac{zk_\perp^2}{2(1-z)} + \frac{(1-z)k_\perp^2}{2z} \right) + \frac{k_\perp^2}{2z}(1-z) \right] = \\ &= 2\frac{e^2}{z(1-z)} k_\perp^2 \frac{2z(1-z) + z^2 + 2(1-z)^2}{z} = \\ &= 8\pi\alpha \frac{k_\perp^2}{z(1-z)} \frac{1 + (1-z)^2}{z}. \end{aligned}$$

²Si ha:

$$d^3\mathbf{k} = d^2k_\perp dk_3,$$

con

$$dk_3 \approx dzE$$

a meno di termini proporzionali a k_\perp^2 , trascurabili per via della successiva moltiplicazione per d^2k_\perp . Rimane da calcolare:

$$\begin{aligned} d^2k_\perp &= k_\perp dk_\perp d\phi_\perp = 2\pi k_\perp dk_\perp = \\ &= 2\pi \frac{1}{2} dk_\perp^2 = \pi dk_\perp^2, \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $dk_\perp^2 = 2k_\perp dk_\perp$.

Si giunge, infine, a calcolare la sezione d'urto per l'intero processo di figura 2.3(a) se si sostituisce la (2.14) nella (2.13):

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \frac{dz dk_{\perp}^2}{2\pi} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \sigma_2 = \\ &= \int dx \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1+x^2}{1-x} \sigma_2,\end{aligned}$$

con $x \equiv 1 - z$ frazione di momento rimanente all'elettrone. Si definisce vertice di Altarelli-Parisi:

$$\mathcal{P}_{e^- \rightarrow e^- + \gamma}(x) \equiv \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1+x^2}{1-x},$$

divergente per $x \rightarrow 1$, in accordo con la divergenza infrarossa. Per comprenderne il significato fisico è opportuno notare che, utilizzando l'espressione approssimata per q , si ha

$$q^2 = -\frac{k_{\perp}^2}{z} + \mathcal{O}(k_{\perp}^4) \underset{\mathcal{O}(k_{\perp}^2)}{\approx} \frac{k_{\perp}^2}{z},$$

dunque:

$$\frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} = \frac{dq^2}{q^2}.$$

Da quanto illustrato fino ad ora risulta, quindi, abbastanza evidente che

$$\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1+x^2}{1-x} \frac{dq^2}{q^2}$$

rappresenta la probabilità che l'elettrone emetta un fotone conservando una frazione x di energia e variando la propria virtualità di dq^2 .

2.4 Equazioni di Altarelli-Parisi

Per quanto visto fino ad ora è lecito pensare che un elettrone (o un positrone) coinvolto in un processo di scattering risenta del campo delle altre particelle cariche ed emetta radiazione per Bremsstrahlung, risultando, quindi, accompagnato da uno sciame di fotoni. Di conseguenza, si può considerare la densità di probabilità di trovare all'interno di questo sciame, ovvero "dentro" all'elettrone originario, un elettrone avente una frazione x del quadrimpulso totale, alla scala di virtualità s . Tale densità di probabilità è descritta dalla funzione di struttura $\mathcal{D}(x, s)$, soluzione di un'equazione differenziale che ne descrive l'evoluzione al variare di s ([15, 16, 17, 18, 19, 20]).

Per ricavare questa equazione, si cominci con il notare che la probabilità differenziale $\mathcal{D}(x, s + ds)$ di trovare nello sciame un elettrone con una frazione x del momento originario e con virtualità $s + ds$ è data dalla somma della probabilità che l'elettrone vari la propria virtualità di ds lasciando x inalterata e di quella che, al contrario, lo faccia irraggiando un fotone. In quest'ultimo caso si ha $x = zy$, dove $1 - z$ è la frazione di quadrimpulso del fotone emesso, rispetto a quello dell'elettrone prima dell'irraggiamento. Si possono, quindi, sfruttare i risultati acquisiti nel paragrafo precedente e osservare che la probabilità di emissione di un fotone con variazione di virtualità ds è:

$$\frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \int_0^{x+} dz \mathcal{P}(z),$$

con $x_+ \lesssim 1$ per dare un senso all'integrale nonostante la singolarità (infrarossa) del vertice di Altarelli-Parisi in $z = 1$. La probabilità di non emissione è, di conseguenza:

$$(2.15) \quad 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z) .$$

Osservando che $\delta(zy - x) = \frac{1}{|z|} \delta\left(y - \frac{x}{z}\right)$ impone la condizione $x = zy$, valida per il caso di emissione di un fotone, si scrive:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x, s + ds) &= \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z)\right) \mathcal{D}(x, s) + \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \int_x^1 dy \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z) \mathcal{D}(y, s) \delta(zy - x) = \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z)\right) \mathcal{D}(x, s) + \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \theta(y - x) \theta(1 - y) \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z) \mathcal{D}(y, s) \delta(zy - x) = \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z)\right) \mathcal{D}(x, s) + \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \int_0^{x_+} \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) \theta\left(\frac{x}{z} - x\right) \theta\left(1 - \frac{x}{z}\right) . \end{aligned}$$

Portando $\mathcal{D}(x, s)$ al primo membro e dividendo per $\frac{ds}{s}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} s \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D}(x, s) &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z) \mathcal{D}(x, s) + \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{x_+} \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) \theta\left(\frac{x}{z} - x\right) \theta\left(1 - \frac{x}{z}\right) = \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z) \left[\mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) \theta\left(\frac{x}{z} - x\right) \theta\left(1 - \frac{x}{z}\right) \right]_{z=1} + \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{x_+} \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) \theta\left(\frac{x}{z} - x\right) \theta\left(1 - \frac{x}{z}\right) , \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si sono sfruttate le proprietà della distribuzione θ . Si definisca, ora, il vertice di Altarelli-Parisi regolarizzato $\mathcal{P}_+(z)$ come quella distribuzione che soddisfa a

$$(2.16) \quad \int_0^1 dz \mathcal{P}_+(z) f(z) = \int_0^1 dz \mathcal{P}(z) [f(z) - f(1)]$$

per ogni generica test-funzione $f(z)$. Sfruttando nuovamente le proprietà della θ , si giunge, infine, all'equazione di Altarelli-Parisi ([21, 22, 23]):

$$(2.17) \quad s \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D}(x, s) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \mathcal{P}_+(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) ,$$

dove si è potuto eseguire il limite $x_+ \rightarrow 1$ perché la (2.16) garantisce l'esistenza dell'integrale al secondo membro della (2.17).

Si può, poi, verificare che l'espressione analitica

$$(2.18) \quad \mathcal{P}_+(z) = \mathcal{P}(z) - \delta(1 - z) \int_0^1 dt \mathcal{P}(t)$$

soddisfa alla (2.16).

2.5 Metodi risolutivi e Parton Shower

Esistono vari metodi risolutivi per l'equazione di Altarelli-Parisi, alcuni analitici ed altri numerici. Si può, ad esempio, ricordare brevemente l'utilizzo della trasformata di Mellin di una generica funzione $f(x)$

$$(2.19a) \quad F(n) = \int_0^1 dx x^{n-1} f(x)$$

e della sua inversa

$$(2.19b) \quad f(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dn}{2\pi i} x^{-n} F(n).$$

Applicando la (2.19a) alla (2.17) si ottiene l'equazione:

$$s \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D}(n, s) = \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{D}(n, s) \mathcal{P}_+(n),$$

la cui soluzione, con la condizione iniziale:

$$\mathcal{D}(n, m_e^2) = 1 \quad (\mathcal{D}(x, m_e^2) = \delta(1-x))$$

è:

$$(2.20) \quad \mathcal{D}(n, s) = \exp \left[\frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{P}_+(n) \ln \frac{s}{m_e^2} \right] = \exp \left[\frac{\eta}{4} \mathcal{P}_+(n) \right],$$

dove si è posto $\eta = \frac{2\alpha}{\pi} L$ e la trasformata del vertice di Altarelli-Parisi regolarizzato è:

$$\mathcal{P}_+(n) = \frac{3}{2} + \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{n}.$$

La funzione di struttura $\mathcal{D}(x, s)$ viene banalmente ottenuta dalla (2.20) facendone l'antitrasformata (2.19b).

Alternativamente, si può, sotto opportune condizioni, cercare una soluzione analitica approssimata. Nella regione di radiazione debole ($x \approx 1$), vale, ad esempio, la soluzione di Gribov-Lipatov:

$$(2.21) \quad \mathcal{D}_{\text{GL}}(x, s) = \frac{\exp \left[\frac{1}{2} \eta \left(\frac{3}{4} - \gamma_E \right) \right]}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{2} \eta \right)} \frac{1}{2} \eta (1-x)^{\frac{1}{2} \eta - 1},$$

dove

$$\gamma_E \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n \right] \approx 0.5772157$$

è la costante di Eulero-Mascheroni. Si noti che il termine $\eta(1-x)^{\frac{1}{2}\eta-1}$ fa sì che la (2.21) tenga conto del contributo di logaritmo dominante esponenziato a tutti gli ordini, come già visto nella (2.7).

Un ulteriore approccio risolutivo è si basa sul porre la (2.17) nella forma:

$$\mathcal{D}(x, s) = \delta(1-x) + \int_{m^2}^s \frac{ds'}{s'} \int_x^1 \frac{dz}{z} \mathcal{P}_+(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s'\right)$$

e nel risolverla iterativamente. A differenza della soluzione di Gribov-Lipatov, l'espressione per la funzione di struttura che si ottiene così è valida per ogni x , ma risulta troncata ad un ordine perturbativo finito. Insieme alla (2.21), può essere però utilizzata per costruire soluzioni miste o ibride, in cui la soluzione di Gribov-Lipatov viene utilizzata per approssimare al limite di fotone soffice tutti quei termini che non vengono calcolati iterativamente.

Un altro metodo per avvicinarsi all'equazione di Altarelli-Parisi si fonda sull'utilizzo del metodo Monte Carlo e va sotto il nome di algoritmo di Parton Shower. Prima di poterlo presentare, tuttavia, va introdotto il fattore di forma di Sudakov $\Pi(s_f, s_i)$, cioè la probabilità che l'elettrone nella sua evoluzione da virtualità s_i a virtualità s_f emetta fotoni con frazione di energia solo sotto una certa soglia ε . Dalla (2.15) si può facilmente riconoscere che:

$$(2.22) \quad \Pi(s_f + ds_f, s_i) = \Pi(s_f, s_i) \left[1 - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds_f}{s_f} \int_0^{1-\varepsilon} dz \mathcal{P}(z) \right],$$

da cui segue:

$$(2.23) \quad \Pi(s_f, s_i) = \exp \left[-\frac{\alpha}{2\pi} \int_{s_i}^{s_f} \frac{ds'}{s'} \mathcal{I}_+ \right],$$

dove si è posto:

$$\mathcal{I}_+ \equiv \int_0^{1-\varepsilon} dz \mathcal{P}(z) = -2 \ln \varepsilon - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 - 1 - \varepsilon.$$

Ricordando l'espressione (2.18) per il vertice di Altarelli-Parisi regolarizzato, la (2.17) si riscrive esplicitamente:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} s \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D}(x, s) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) + \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \delta(1-z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) \int_0^1 dt \mathcal{P}(t) = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) - \frac{\alpha}{2\pi} \underbrace{\int_0^1 dt \mathcal{P}(t) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right)}_{\mathcal{I}} = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \left[\int_x^{x_+ \equiv 1-\varepsilon} \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) + \int_{x_+}^1 \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) - \mathcal{D}(x, s) \mathcal{I} \right] \approx \\ &\approx \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^{x_+} \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) - \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}_+ \mathcal{D}(x, s), \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è posto $z \approx 1$ per poter approssimare gli ultimi due termini per mezzo della relazione $\mathcal{I}_+ = \mathcal{I} - \int_{x_+}^1 dz \mathcal{P}(z)$. In conclusione, la (2.24) risulta essere in forma analoga alla (2.17), a patto di assumere una diversa regolarizzazione del vertice di Altarelli-Parisi che obbedisca alla relazione:

$$\mathcal{P}_+(x) = \mathcal{P}(x) \theta(x_+ - x) - \delta(1-x) \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z).$$

Si ottiene, dunque:

$$(2.25) \quad s \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D}(x, s) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^{x+} \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s\right) - \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^{x+} dz \mathcal{P}(z) .$$

Dalla (2.23) discende che:

$$\frac{d\Pi(s, s')}{\Pi(s, s')} = \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}_+ \frac{ds'}{s'} ;$$

Sostituendo quest'ultima relazione nella (2.24) si arriva a scrivere:

$$s' \frac{\partial}{\partial s'} \mathcal{D}(x, s') = \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^{x+} \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s'\right) \frac{1}{s'} - \frac{s'}{\Pi(s, s')} \frac{\partial}{\partial s'} \Pi(s, s') \mathcal{D}(x, s') ,$$

cioè

$$d[\mathcal{D}(x, s) \Pi(s, s')] = \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^{x+} \frac{dz}{z} \mathcal{P}(z) \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s'\right) \Pi(s, s') \frac{ds'}{s'} ,$$

che porta a scrivere una soluzione implicita per l'equazione di Altarelli-Parisi:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}(x, s) &= \Pi(s, m_e^2) \mathcal{D}(x, m_e^2) + \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_{m_e^2}^s \frac{ds'}{s'} \Pi(s, s') \int_x^{x+} \frac{dz}{z} \mathcal{D}\left(\frac{x}{z}, s'\right) . \end{aligned}$$

La soluzione iterativa formale della (2.26) [24]

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}(x, s) &= \Pi(s, m_e^2) \delta(1-x) + \\ &+ \int_{m_e^2}^s \Pi(s, s') \frac{ds'}{s'} \Pi(s', m_e^2) \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{x+} dy \mathcal{P}(y) \delta(x-y) + \\ &+ \int_{m_e^2}^s \Pi(s, s') \frac{ds'}{s'} \int_{m_e^2}^{s'} \Pi(s', s'') \frac{ds''}{s''} \Pi(s'', m_e^2) \times \\ &\times \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int_0^{x+} dx_1 \int_0^{x+} dx_2 \mathcal{P}(x_1) \mathcal{P}(x_2) \delta(x-x_1 x_2) + \dots = \\ &= \Pi(s, m_e^2) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^k \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k L \int_0^{x+} dx_i \mathcal{P}(x_i) \delta(x-x_1 \dots x_k) \end{aligned}$$

ha la seguente interpretazione fisica ([25]): il contributo di ordine α^n alla funzione di struttura $\mathcal{D}(x, s)$ è dato dal prodotto delle n probabilità di evoluzione da virtualità m_e^2 a s_1 , da s_1 a s_2 , e così via, senza emissione di fotoni più energetici di $\varepsilon = 1 - x_+$ e delle n probabilità di emissione di un fotone che lascia una frazione x_i di energia all'elettrone e ne varia la virtualità da s_i a $s_i + ds_i$.

La particolare forma della (2.27) suggerisce l'idea di utilizzare un metodo Monte Carlo per calcolare e simulare gli effetti dell'emissione di radiazione ([26]). Questo fatto è, del resto, pienamente compatibile con la visione probabilistica che sta alla base di tutto il formalismo di Altarelli-Parisi, nel senso che una soluzione numerica esatta della (2.25) ad una data virtualità s consente di generare la variabile x distribuita come $\mathcal{D}(x, s)$. L'algoritmo che fa questo va sotto il nome di Parton Shower e può essere schematizzato come segue ([24, 27]):

1. si fissano le condizioni iniziali $K^2 = m_e^2$ e $x = 1$ per la virtualità dell'elettrone e per la sua frazione di energia;

2. si estrae, con distribuzione uniforme, un numero casuale ξ compreso tra 0 e 1;
3. si confronta ξ con la probabilità $\Pi(s, K^2)$:
 - se $\xi \leq \Pi(s, K^2)$ l'algoritmo si interrompe;
 - se $\xi > \Pi(s, K^2)$ c'è stata emissione di fotoni: si calcola la nuova virtualità K'^2 invertendo l'equazione $\xi = \Pi(K'^2, K^2)$;
4. nell'intervallo tra 0 e $x_+ \equiv 1 - \varepsilon$ si estrae, secondo la distribuzione data dal vertice di Altarelli-Parisi $\mathcal{P}(z)$, la frazione z di energia rimanente all'elettrone;
5. si effettuano le sostituzioni $K^2 \rightarrow K'^2$ e $x \rightarrow zx$ e si ritorna al punto 2.

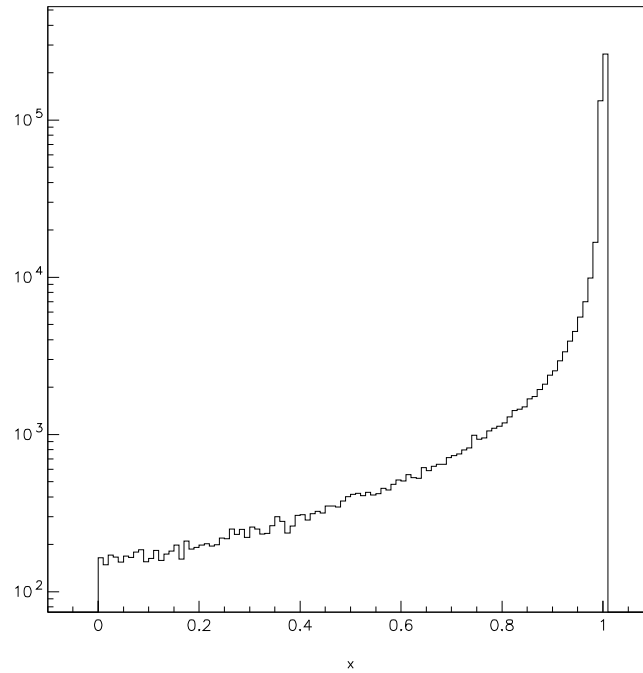


Figura 2.4: Distribuzione della x ottenuta mediante Parton Shower. In ordinata è riportato il numero di eventi. Si è posto $\sqrt{s} = 190 \text{ GeV}$ e si è effettuata la simulazione di $5 \cdot 10^5$ eventi con $\varepsilon = 10^{-5}$.

Una caratteristica piuttosto importante dell'algoritmo appena enunciato è quella di restituire ad ogni passaggio non solo la frazione di energia x , ma anche la virtualità K^2 dell'elettrone, così che risulta possibile ricostruire una cinematica approssimata del processo. Questo non è, invece, possibile se ci si limita allo studio, ancorché esatto, della funzione di struttura. Come, infatti, si può notare dalla (2.26), la risoluzione dell'equazione di Altarelli-Parisi (2.25) prevede che l'integrazione sia su questi parametri, con conseguente perdita di informazione.

L'affidabilità del Parton Shower viene verificata applicando una variante troncata a $\mathcal{O}(\alpha)$ dell'algoritmo. In questo modo, i risultati ottenuti possono essere direttamente confrontati con quelli derivanti dall'usuale calcolo in teoria delle perturbazioni al prim'ordine. In termini di funzioni di struttura, la sezione d'urto da calcolare è:

$$\sigma_{\mathcal{O}(\alpha)} = \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \int_{\Omega} d\sigma_0 [\mathcal{D}(x_1, Q^2) \mathcal{D}(x_2, Q^2) \mathcal{D}(y_1, Q^2) \mathcal{D}(y_2, Q^2)]_{\mathcal{O}(\alpha)}$$

Troncando la serie nella (2.27) al primo ordine in α (e sviluppando allo stesso ordine i fattori di forma di Sudakov) è possibile valutare il prodotto ([24]) (per semplicità si considera il prodotto di due sole funzioni di struttura):

$$(2.28) \quad [\mathcal{D}(x, s) \mathcal{D}(y, s)]_{\mathcal{O}(\alpha)} = \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \mathcal{I}_+ \ln \frac{s}{m_e^2} \right] \delta(1-x) \delta(1-y) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_e^2} \left[\delta(1-x) \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z) \delta(y-z) + \left[+\delta(1-y) \int_0^{x_+} dz \mathcal{P}(z) \delta(x-z) \right] \right],$$

correttamente normalizzato a 1:

$$\int_0^1 dx dy [\mathcal{D}(x, s) \mathcal{D}(y, s)]_{\mathcal{O}(\alpha)} = 1.$$

I passi dell'algoritmo Parton Shower per ottenere x e y distribuite secondo la (2.28) sono i seguenti:

1. si fissano le condizioni iniziali $K_{1,2}^2 = m_e^2$ e $x = y = 1$;
2. si estrae, con distribuzione uniforme, un numero casuale ξ compreso tra 0 e 1;
3. si confronta ξ con la probabilità $[\Pi^2(s, m_e^2)]_{\mathcal{O}(\alpha)}$:
 - se $\xi \leq [\Pi^2(s, m_e^2)]_{\mathcal{O}(\alpha)}$ l'algoritmo si interrompe;
 - se $\xi > [\Pi^2(s, m_e^2)]_{\mathcal{O}(\alpha)}$ c'è stata emissione di un fotone: nell'intervallo tra 0 e $x_+ \equiv 1 - \varepsilon$ si estrae, secondo la distribuzione data dal vertice di Altarelli-Parisi $\mathcal{P}(z)$, la frazione z di energia rimanente all'elettrone e si pone con uguale probabilità $x = z$ oppure $y = z$; a seconda della scelta operata si calcola la nuova virtualità $K_{1,2}^2$ della particella che ha emesso il fotone invertendo l'equazione $\xi = [\Pi^2(s, m_e^2)]_{\mathcal{O}(\alpha)}$.

Si può utilizzare il Parton Shower per convincersi dell'indipendenza da ε della funzione di struttura (2.27) nella regione $[0, 1 - \varepsilon]$. Si osservi figura 2.5: la curva continua è stata ottenuta simulando con $\varepsilon = 10^{-1}$, mentre quella tratteggiata è la stessa di figura 2.4 ($\varepsilon = 10^{-5}$). A meno di differenze statistiche dovute all'utilizzo di un metodo Monte Carlo, esse sono sovrapponibili. La dipendenza da ε , tramite $\Pi(s, m_e^2)$, è limitata alle x comprese nell'intervallo $(1 - \varepsilon, 1]$ e determina un errore $\mathcal{O}(\varepsilon)$, trascurabile per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Come si accennava in precedenza, ogni passo dell'algoritmo restituisce la virtualità e la frazione di energia di un elettrone immediatamente dopo l'emissione di ciascun

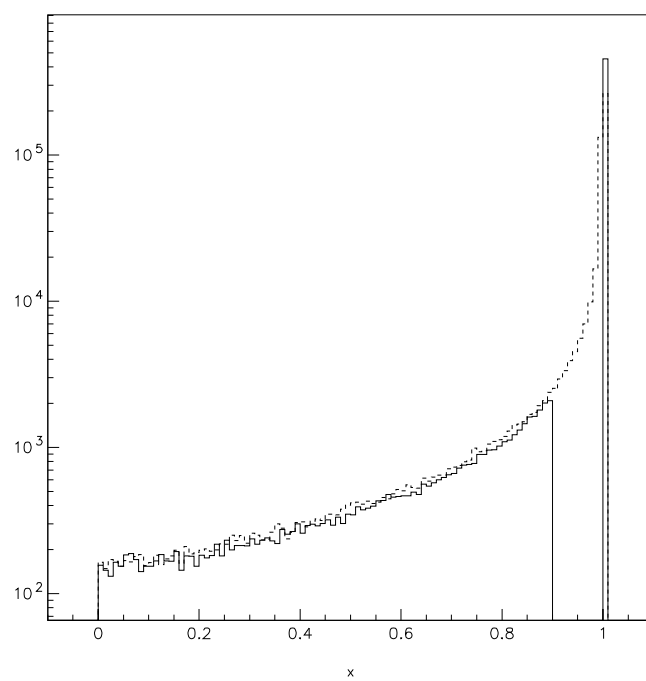


Figura 2.5: Confronto tra distribuzioni di x ottenute mediante Parton Shower con ϵ diversi: $\epsilon = 10^{-1}$, linea continua, e $\epsilon = 10^{-5}$, linea tratteggiata.

fotone. Questo permette di ricostruire passo a passo la cinematica del processo. Si può, ad esempio, porre:

$$\begin{cases} p = (E, \mathbf{0}, p_z) \\ p' = (zE, \mathbf{p}_\perp, p'_z) \\ q = ((1-z)E, -\mathbf{p}_\perp, q_z) . \end{cases}$$

Imponendo le virtualità del fermione rispettivamente prima e dopo l'emissione del fotone $p^2 = K^2$ e $p'^2 = K'^2$, quella del fotone $q^2 = 0$ e considerando anche la conservazione della componente z del momento si può scrivere il sistema:

$$\begin{cases} E^2 - p_z^2 = K^2 \\ z^2 E^2 - p_\perp^2 - p'_z{}^2 = K'^2 \\ (1-z)^2 E^2 - p_\perp^2 - q_z^2 = 0 \\ p'_z + q_z = p_z . \end{cases}$$

Segue:

$$\begin{cases} p_z = (E - K^2)^{\frac{1}{2}} \\ p'_z = \frac{1}{2(E^2 - K^2)^{\frac{1}{2}}} [2zE^2 - K^2 - K'^2] \\ q_z = \frac{1}{2(E^2 - K^2)^{\frac{1}{2}}} [K'^2 - K^2 + 2E^2(1-z)] \\ p_\perp^2 = (1-z)^2 E^2 - \frac{[K'^2 - K^2 + 2E^2(1-z)]^2}{4(E^2 - K^2)} . \end{cases}$$

Questa soluzione, tuttavia, non garantisce la positività di p_\perp^2 per ogni possibile scelta di x , di K^2 e di K'^2 . L'imposizione delle opportune condizioni fisiche, inoltre, fa sì che il Parton Shower non generi più la corretta distribuzione $\mathcal{D}(x, Q^2)$.

Alternativamente è possibile cercare una cinematica approssimata consistentemente con quanto già fatto nel paragrafo 2.3. Si considera, dunque, $E^2 \gg p_\perp^2$ e $E^2 \gg K^2$ e si sviluppano le precedenti soluzioni al prim'ordine in $\frac{p_\perp^2}{E^2}$, $\frac{K^2}{E^2}$ e in $\frac{K'^2}{E^2}$, in modo da ottenere:

$$(2.29) \quad \begin{cases} p_z = E - \frac{K^2}{2E} \\ p'_z = zE - \frac{(1-z)K^2 + K'^2}{2E} \\ q_z = (1-z)E - \frac{zK^2 - K'^2}{2E} \\ p_\perp^2 = (1-z) \left(zK^2 - K'^2 \right) . \end{cases}$$

Ancora non è garantito $p_\perp^2 > 0$, però ora il problema si può aggirare ponendo $p_\perp \equiv 0$. La cinematica (2.29) va sotto il nome di "pure Parton Shower".

La discussione appena fatta si basa su un'assunzione di assoluta affidabilità del Parton Shower nella ricostruzione della cinematica. Una scelta alternativa, però, può essere, invece, quella di ritenere, tra i dati provenienti dall'algoritmo, solo la frazione

di energia z e di riprendere invece i risultati di pag. 14. Si suppone, quindi, che ogni particella carica contribuisca indipendentemente allo spettro del fotone come ([28]):

$$(2.30) \quad P(\cos \vartheta_\gamma) \propto \frac{1}{1 - \beta \cos \vartheta_{\gamma-f}},$$

dove β è la velocità del fermione e $\cos \vartheta_{\gamma-f}$ è l'angolo di emissione del fotone rispetto all'elettrone. Questa distribuzione viene utilizzata per ottenere p_\perp e quindi risalire all'intera cinematica. Questo particolare modo di procedere viene chiamato prescrizione di polo dominante, "leading pole" in inglese.

Le cinematiche mostrate fino ad ora non tengono in realtà conto di un fatto importante. Quando più particelle cariche sono coinvolte nel processo, fenomeni di interferenza della radiazione emessa da ciascuna di esse influiscono sulla distribuzione angolare dei fotoni. Questo implica la necessità di correggere in maniera appropriata la (2.30). Dalla formula di Yennie-Frautchi-Suura ([29]), valida in approssimazione sofficie, riscritta all'ordine α^n :

$$d\sigma_{\mathcal{O}(\alpha^n)} \approx d\sigma_0 \frac{e^{2n}}{n!} \prod_{l=1}^n \frac{d^3 \mathbf{q}_l}{(2\pi)^3 2q_l^0} \sum_{i,j=1}^N \eta_i \eta_j \frac{-p_i \cdot p_j}{(p_i \cdot q_l)(p_j \cdot q_l)},$$

dove N è il numero di fermioni emittenti, è possibile ricavare informazioni sullo spettro angolare dell' l -esimo fotone:

$$(2.31) \quad \cos \vartheta_l \propto - \sum_{i,j=1}^N \eta_i \eta_j \frac{1 - \beta_i \beta_j \cos \vartheta_{ij}}{(1 - \beta_i \cos \vartheta_{il})(1 - \beta_j \cos \vartheta_{jl})},$$

dove β_k è la velocità del k -esimo fermione e ϑ_{kl} è l'angolo tra questo e l' l -esimo fotone.

Capitolo 3

Matching e BABAYAGA

Nel capitolo 2 sono stati illustrati gli aspetti teorici delle correzioni radiative ai processi e^+e^- e, in particolare, nel paragrafo 2.5, l'algoritmo Parton Shower per la generazione di eventi in accordo con l'equazione di Altarelli-Parisi.

Il Parton Shower è stato applicato allo sviluppo di un generatore di eventi Monte Carlo per il calcolo di precisione del processo Bhabha, BABAYAGA¹, realizzato a Pavia presso la locale Sezione dell'INFN e il Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica dell'Università.

Scopo di questo capitolo è quello di illustrare le caratteristiche salienti di questo programma, comprese le ultime migliorie apportate per tener conto anche dei risultati esatti a $\mathcal{O}(\alpha)$. Il Parton Shower, infatti, calcola i termini a tale ordine soltanto in maniera approssimata, mentre, in realtà, questi sono noti in letteratura in forma completa. Risulta, quindi, doveroso, prima di passare alla discussione su BABAYAGA, aggiungere alcune ultime considerazioni teoriche a quanto già enunciato nei precedenti capitoli.

3.1 Correzioni radiative esatte $\mathcal{O}(\alpha)$

Prima di procedere è opportuno riassumere brevemente i principali risultati relativi al calcolo della sezione d'urto esatta a $\mathcal{O}(\alpha)$ per il processo $e^+e^- \rightarrow e^+e^-(\gamma)$. Questa è data dalla somma di un contributo soffice-virtuale e da uno reale:

$$(3.1) \quad \sigma^{\text{esatta}(\alpha)} = \sigma_{\text{SV}}^{\text{esatta}(\alpha)}(E_\gamma < k_0) + \sigma_{\text{R}}^{\text{esatta}(\alpha)}(E_\gamma > k_0).$$

Il parametro k_0 è il cut-off di energia del fotone scelto per separare la regione di radiazione soffice da quella di radiazione dura (reale). Se E è l'energia dell'elettro-ne incidente, è immediato notare che il rapporto $\frac{k_0}{E}$ è equivalente al parametro ε introdotto nel paragrafo 2.5 discutendo del Parton Shower.

La forma esplicita dei termini che appaiono nella (3.1) è data in Appendice A.2 a pag. 61.

¹Da Баба Яга, nome di una strega del folklore russo, che ha ispirato, tra gli altri, il compositore Modest Mussorgsky (1839-1874) (si veda [24, pag. 107]).

3.2 Parton Shower e correzioni $\mathcal{O}(\alpha)$: il “matching”

La formula della sezione d'urto per il Parton Shower si ricava dalla (2.27) ed è nella forma:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} d\sigma^{\text{PS}} = & d\sigma_0(x) \left[\Pi(Q^2, m_e^2) \delta(1-x) + \right. \\ & \left. + \Pi(Q^2, m_e^2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \int_{-1}^{+1} d\cos\vartheta_{\gamma_i} \int_0^{1-\varepsilon} dx_i \mathcal{P}(x_i) I(\mathbf{k}_i) \times \right. \\ & \left. \times \delta(x - x_1 \cdots x_n) \right], \end{aligned}$$

dove $I(\mathbf{k}_i)$ è la funzione, correttamente normalizzata, che rappresenta la distribuzione angolare dei fotoni (2.31). Nella (3.2) si è tenuto separato dagli altri il contributo soffice-virtuale, in cui non viene presa in considerazione l'emissione di alcun fotone con energia sopra la frazione ε di quella dell'elettrone. All'interno della sommatoria, invece, si può notare, per ogni n , il prodotto delle probabilità di emissione di 1, 2, \dots , n fotoni, ciascuna delle quali è rappresentata da un vertice di Altarelli-Parisi.

Espandendo la (3.2) a $\mathcal{O}(\alpha)$ si ottiene:

$$(3.3) \quad \frac{d\sigma^{\text{PS}(\alpha)}}{dx_1 d\cos\vartheta_{\gamma_1}} = d\sigma_0(x) \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}_+ L\right) \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{P}(x_1) I(\mathbf{k}_1) \delta(x - x_1) \right].$$

In questa equazione si distinguono tre contributi:

1. la sezione d'urto $d\sigma_0$ del processo Born, senza emissione di fotoni, né reali né soffici-virtuali;
2. la sezione d'urto Parton Shower $d\sigma_{\text{SV}}^{\text{PS}(\alpha)} \equiv -\frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}_+ L d\sigma_0$ derivante dai fotoni soffici-virtuali;
3. la sezione d'urto Parton Shower $d\sigma_{\text{R}}^{\text{PS}(\alpha)} \equiv \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{P}(x_1) I(\mathbf{k}_1) d\sigma_0 \delta(x - x_1)$ derivante dal fotone reale emesso sopra la soglia ε .

La (3.3) non è la sezione d'urto esatta a $\mathcal{O}(\alpha)$, come quella derivante dall'usuale calcolo perturbativo mostrata nel paragrafo 3.1. Infatti, il Parton Shower è un metodo che, ad ogni ordine dato, include solo i contributi ai logaritmi dominanti con il vantaggio, tuttavia, di risommarli, nella sezione d'urto completa di formula (3.2), a tutti gli ordini perturbativi. Come si mostrerà nel capitolo 4 in sede di analisi dei risultati numerici, per garantire la precisione richiesta nella determinazione della luminosità, l'ideale sarebbe poter recuperare anche i contributi non dominanti $\mathcal{O}(\alpha)$, prestando, tuttavia, attenzione a non considerare erroneamente due volte lo stesso ordine di α logaritmico, esatto e Parton Shower.

Il procedimento originale ideato per effettuare questa inclusione è stato chiamato “matching” e parte dall'introduzione dei fattori:

$$(3.4a) \quad F_{\text{SV}} \equiv 1 + \frac{d\sigma_{\text{SV}}^{\text{esatta}(\alpha)} - d\sigma_{\text{SV}}^{\text{PS}(\alpha)}}{d\sigma_0}$$

e

$$(3.4b) \quad F_{\text{R}}^i \equiv 1 + \frac{d\sigma_{\text{R}}^{\text{esatta}(\alpha)}(\mathbf{k}_i) - d\sigma_{\text{R}}^{\text{PS}(\alpha)}(\mathbf{k}_i)}{d\sigma_{\text{R}}^{\text{PS}(\alpha)}(\mathbf{k}_i)}.$$

La (3.4a) si applica al fattore di forma di Sudakov, mentre la (3.4b) è relativa ai fotoni reali:

$$(3.5) \quad d\sigma^{\text{PS}'} = d\sigma_0(x) \left[F_{\text{SV}} \Pi(Q^2, m_e^2) \delta(1-x) + F_{\text{SV}} \Pi(Q^2, m_e^2) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^k \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k \int_0^{1-\varepsilon} dx_i F_{\text{R}}^i \mathcal{P}(x_i) I(\mathbf{k}_i) \times \delta(x-x_1 \dots x_k) \right].$$

Si noti che la $d\sigma^{\text{PS}'}$ è ancora completamente differenziale in tutte le variabili cinematiche dell'evento. Il matching è, infatti, realizzato in maniera esclusiva su ogni punto dello spazio fasi multi-fotonico.

L'espansione a $\mathcal{O}(\alpha)$ della (3.5) è:

$$\frac{d\sigma^{\text{PS}(\alpha)'}}{dx_1 d\cos\vartheta\gamma_1} = d\sigma_0(x) \left[F_{\text{SV}} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}_+ L \right) \delta(1-x) + F_{\text{R}} \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{P}(x_1) I(\mathbf{k}_1) d\sigma_0 \delta(x-x_1) \right].$$

Sostituendo le (3.4) e trascurando i termini $\mathcal{O}(\alpha^n)$ con $n \geq 2$, si ha, in accordo con le richieste:

$$d\sigma^{\text{PS}(\alpha)'} = d\sigma_0 + d\sigma_{\text{SV}}^{\text{esatta}(\alpha)} + d\sigma_{\text{R}}^{\text{esatta}(\alpha)}.$$

Si vuole, ora, mostrare che i fattori correttivi (3.4) non alterano l'indipendenza da ε della sezione d'urto, ovvero che, nel passaggio

$$\mathcal{D}(x, Q^2) \rightarrow \mathcal{D}'(x, Q^2),$$

dove $\mathcal{D}'(x, Q^2)$ è la funzione di struttura corretta con le (3.4), la nuova $d\sigma$ ha un buon comportamento per $\varepsilon \rightarrow 0$. Occorre, innanzi tutto, ricordare che $\Pi(Q^2, m_e^2) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}_+ L\right)$, con $\mathcal{I}_+ = \int_0^{1-\varepsilon} dx \mathcal{P}(x)$. F_{SV} non dipende da ε , a differenza di F_{R}^i . Trattandosi di una distribuzione di probabilità, inoltre, è altresì abbastanza chiaro che la funzione di struttura originale è normalizzata a 1:

$$(3.6) \quad \int_0^1 dx \mathcal{D}(x, Q^2) = \Pi(Q^2, m_e^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}_+ \ln \frac{Q^2}{m_e^2} \right)^n = \Pi(Q^2, m_e^2) \Pi^{-1}(Q^2, m_e^2) = 1.$$

Si inizi, ora, a riscrivere il prodotto $F_{\text{R}}^i \mathcal{P}(x_i)$ nella forma generale:

$$\mathcal{P}(x_i) + f(x_i),$$

dove si è posto $f(x_i) \equiv \mathcal{P}(x_i) \frac{d\sigma_{\text{R}}^{\text{esatta}(\alpha)}(\mathbf{k}_i) - d\sigma_{\text{R}}^{\text{PS}(\alpha)}(\mathbf{k}_i)}{d\sigma_{\text{R}}^{\text{PS}(\alpha)}(\mathbf{k}_i)}$. Si noti che $\int_0^{1-\varepsilon} dx_i f(x_i)$ non è singolare per $\varepsilon \rightarrow 0$. Dalla (2.27) si ha, dunque:

$$\mathcal{D}'(x, Q^2) = F_{\text{SV}} \Pi(Q^2, m_e^2) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^k \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k L \int_0^{1-\varepsilon} dx_i [\mathcal{P}(x_i) + f(x_i)] \times \delta(x-x_1 \dots x_k).$$

L'integrazione in dx produce termini del tipo $(\mathcal{I}_+ + c)$, con c costante, quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \mathcal{D}'(x, Q^2) &= F_{\text{SV}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}_+ L\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^k \frac{1}{k!} (\mathcal{I}_+ L + c)^k = \\ &= F_{\text{SV}} \exp\left(\frac{\alpha}{2\pi} c\right), \end{aligned}$$

che non presenta comportamenti patologici per $\varepsilon \rightarrow 0$, così come il risultato (3.6).

3.3 Generazione di eventi con BABAYAGA

Il programma **BABAYAGA** ([30]), del quale verrà illustrata inizialmente la versione 3.5, rilasciata nell'ottobre 2002, in quanto paradigmatica dell'implementazione informatica del Parton Shower, è scritto in linguaggio FORTRAN77 e può essere schematizzato con il diagramma di figura 3.1. L'inserimento dei dati di input da parte dell'utente avviene mediante la preparazione di un file "input.txt", in cui devono essere indicati:

- il seme per inizializzare il generatore di numeri casuali;
- il numero N_{max} di eventi da generare;
- il processo da simulare, scelto tra i seguenti:
 1. $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$,
 2. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$,
 3. $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$,
 4. $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$;
- l'energia dei fermioni incidenti;
- i tagli sperimentali da imporre su ogni singolo evento generato;
- se considerare α "running";
- i parametri del fattore di forma del pione (se necessari);
- alcune informazioni relative all'output.

Per prima cosa, **BABAYAGA** inizializza una serie di variabili e quantità, quindi fa partire il ciclo di generazione degli eventi. Per ciascuno di questi viene innanzi tutto preparata l'integrazione Monte Carlo della formula per la sezione d'urto:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \sigma(s) &= \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \int d\Omega_{\text{lab}} \mathcal{D}(x_1, Q^2) \mathcal{D}(x_2, Q^2) \mathcal{D}(y_1, Q^2) \times \\ &\times \mathcal{D}(y_2, Q^2) \frac{d\sigma_0}{d\Omega_{\text{cm}}}(x_1 x_2 s, \vartheta_{\text{cm}}) \left| \frac{\partial \Omega_{\text{cm}}}{\partial \Omega_{\text{lab}}}(x_1, x_2, \vartheta_{\text{lab}}) \right| \Theta(\text{tagli}) . \end{aligned}$$

In dettaglio, si genera il coseno dell'angolo di scattering ϑ_{cm} nel sistema di riferimento del centro di massa. Successivamente vengono chiamate le routine PHOTS e PHOTT, che implementano il Parton Shower vero e proprio sugli stati iniziali e su quelli finali

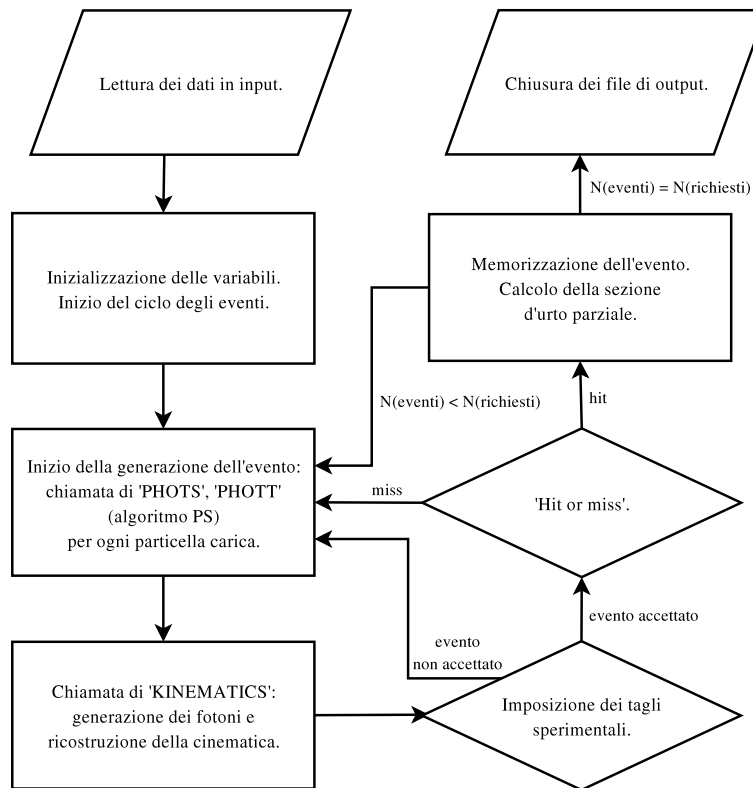


Figura 3.1: Diagramma di flusso semplificato di BABAYAGA (da [24]).

rispettivamente. Si ottengono, in questo modo, le frazioni di energia x_1 , x_2 , y_1 e y_2 . La ricostruzione della cinematica a partire dai parametri precedentemente ottenuti è effettuata attraverso KINEMATICS. La routine CUTUSER, eventualmente modificabile dall'utente per adattarla alle proprie necessità, ha il compito di verificare che ogni singolo evento generato rispetti i tagli sperimentali. Se così non è, allora l'evento viene scartato e ne viene generato uno nuovo.

Il passo successivo è quello di calcolare la sezione d'urto (3.7). Questo viene fatto mediante un procedimento di "hit or miss", accettando gli eventi con probabilità proporzionale a $\sigma_0(x_1x_2s, \cos\vartheta)$. Quella che si ottiene è una sezione d'urto non pesata (unweighted). L'insieme di gli eventi generati, compresi quelli scartati dall'"hit or miss", viene, invece, utilizzato per il calcolo della sezione d'urto pesata (weighted).

Le ultime operazioni che fa BABAYAGA sono relative alla memorizzazione dei risultati ottenuti. I momenti degli eventi vengono salvati in un file *n-tuple* per l'analisi con la Physics Analysis Workstation (PAW) sviluppata presso il CERN. Viene, poi, preparato anche un file "riassuntivo" come quello mostrato in figura 3.2, in cui sono ricordate le impostazioni di input e riportate le due sezioni d'urto calcolate, unweighted e weighted.

Nella preparazione di questa tesi è stata testata l'ultima versione di BABAYAGA, che, come si accennava all'inizio del capitolo, a differenza delle precedenti, realizza il matching tra Parton Shower e calcoli esatti a $\mathcal{O}(\alpha)$. È stato, quindi, utile cambiare l'architettura del codice FORTRAN, riscrivendolo completamente, mantenendo tuttavia inalterata la struttura logica del diagramma di figura 3.1. La principale modifica è consistita sostanzialmente nell'aggiunta di tutta una serie di routine per il calcolo esplicito degli elementi di matrice $\mathcal{O}(\alpha)$ e dei fattori (3.4). Nel nuovo BABAYAGA per il momento si sono limitate le sezioni d'urto calcolabili al solo processo Bhabha $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, mentre si è introdotta un'ulteriore gestione dei dati in uscita, autonoma da PAW, che, comunque, è ancora possibile utilizzare, attraverso una serie di file di testo utilizzabili per disegnare le principali distribuzioni della sezione d'urto differenziale. L'inserimento degli input è stato migliorato preparando un'interfaccia interattiva (vedi figura 3.3). In figura 3.4, invece, è visibile un esempio del file riassuntivo dei risultati della generazione. Si noti l'elenco dei contributi alla sezione d'urto totale, distinti per numero di fotoni emessi. Viene, inoltre, indicato il numero di eventi, tra quelli generati, che hanno soddisfatto i tagli imposti e che sono stati, dunque, effettivamente accettati. Le ultime righe sono relative al calcolo della sezione d'urto non pesata, che nell'esempio riportato è nulla perché il numero di eventi generati (10^6) è inferiore a quello su cui viene calcolata la soglia per l'"hit or miss" (5×10^6).


```
----- INPUTS (from file: input.txt      ) -----  
  
PROCESS: e+ e- ----> e+ e-  
  
EBEAM   =  0.5100 GeV  
ANGULAR CUTS  20.0000 - 160.0000 deg.  
EMIN     =  0.4000 GeV  
ACOLL.   = 10.0000 deg.  
  
FSR is switched on  
Alpha is running  
Hadronic resonances are not included  
No cuts are imposed on photons  
  
RANLUX SEED = 62341342  
OUTPUT FILE = test.txt  
  
EVENTS STORED IN test.ntuple  
  
----- OUTPUTS -----  
  
EVENT NUMBER 100000 OF 100000  
  
Monte Carlo efficiency: 0.30122  
  
UNWEIGHTED CROSS SECTION  
6269.4605609 +- 16.5729157 (nb)  
  
WEIGHTED CROSS SECTION  
6261.3062303 +- 6.6908293 (nb)
```

Figura 3.2: Esempio di file di output di BABAYAGA v3.5.

```
////////////////////////////////////  
//                               Welcome to BABAYAGA!                               //  
//                               ~~~~~~                               //  
//                               //                               //  
//                               It is an event generator for Bhabha process       //  
//                               at low energies                                   //  
////////////////////////////////////
```

Principal Menu:

```
[ type "run" to start generation,  
  "legenda" for help or "quit" to quit ]  
[ ecms   ] CoM energy =    1.02 GeV  
[ thmin  ] min. angle =    55. deg  
[ thmax  ] max. angle =   125. deg  
[ zmax   ] acollinearity =    10. deg  
[ emin   ] min. energy =    0.408 GeV  
[ nev    ] 1000000. events will be generated  
[ path   ] files saved in test-run/  
[ ntuple ] ntuple creation no  
[ menu2  ] the second menu is on
```

Second Menu (inner parameters):

```
[ arun   ] alpha running is on  
[ mode   ] requested evts. are weighted  
[ eps    ] soft photon cutoff = 1.E-06  
[ ord    ] corrections at exp order  
[ model  ] model for corrections is matched  
[ seed   ] seed for RANLUX 700253512  
[ nphot  ] max. number of photons mode is -1  
[ nwrite ] file(s) dumped every 1000000 events  
[ nsearch] events for maximum searching 5000000  
[ verbose] verbose mode (for debugging) 0  
[ sdmax  ] starting "sdifmax" 1.E-18
```

Insert "variable value":

Figura 3.3: Interfaccia di input di BABAYAGA, con il menu secondario visualizzato.

Capitolo 4

Risultati numerici

Lo scopo di questo capitolo è quello di mostrare la simulazione Monte Carlo del processo Bhabha mediante BABAYAGA. Verranno, quindi, presentati e commentati alcuni risultati ottenuti con l'ultima versione del programma, con particolare attenzione alla disamina dei vari tipi di correzione introdotti dal Parton Shower e dal matching con gli elementi di matrice $\mathcal{O}(\alpha)$ esatto. Si intende, infatti, valutare l'accuratezza teorica raggiunta e la sua aderenza alle richieste. Nella preparazione di questa sezione si è sfruttato il cluster Beowulf della sezione INFN.

4.1 Indipendenza dal separatore infrarosso

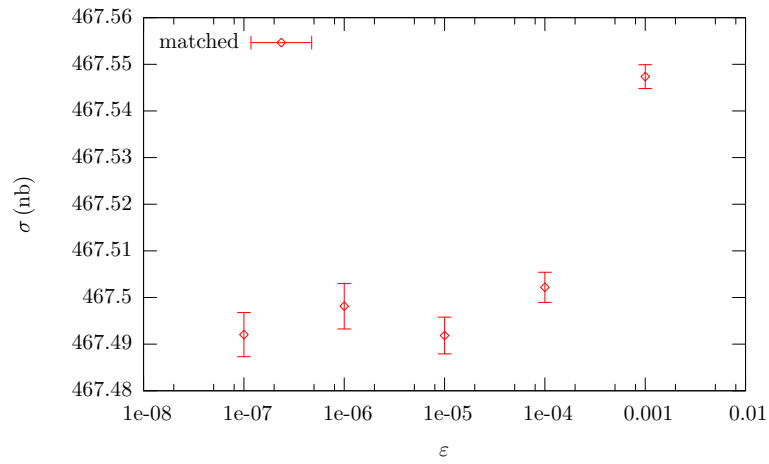
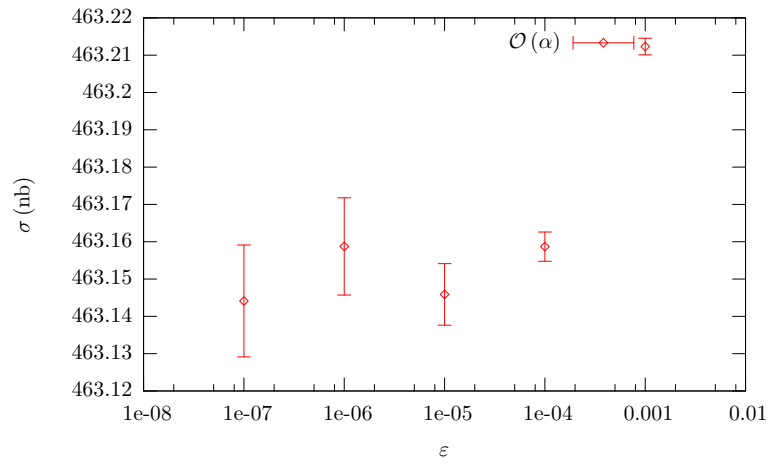
Il primo test operato su BABAYAGA è stata la verifica dell'effettiva indipendenza della sezione d'urto dal parametro non fisico ε , in accordo con quanto discusso nel paragrafo 2.5. Nel menù secondario del programma (vedi figura 3.3) si è, dunque, impostato ε su cinque valori via via differenti (10^{-7} , 10^{-6} , 10^{-5} , 10^{-4} , 10^{-3}) e per ciascuno di essi si è calcolata la sezione d'urto, sia quella completamente esponenziata, sia quella a $\mathcal{O}(\alpha)$. Per minimizzare l'errore statistico sono stati simulati all'incirca 10^{10} eventi.

I risultati ottenuti in funzione di ε , con le relative barre d'errore, sono rappresentati in figura 4.1. È immediato notare che i valori di σ ottenuti sono compatibili a $\mathcal{O}(\varepsilon)$, in accordo con quanto discusso a pag. 27 e a pag. 34.

4.2 Criteri di selezione degli eventi

Nel presentare i risultati che seguono, BABAYAGA è stato fatto operare in quattro diverse configurazioni dei dati di input, differenti per energia nel centro di massa e per accettazione angolare. La loro scelta è stata dettata dalla volontà di simulare condizioni realistiche in ottica sperimentale. Sono stati, quindi, scelti parametri tipici per le flavour factory e imposti tagli sull'acollinearità ξ e sull'energia dell'elettrone e del positrone di stato finale, per selezionare gli eventi. L'emissione di radiazione, infatti, riduce l'energia dei leptoni coinvolti e ne modifica la cinematica, rispetto a quella in approssimazione di Born. Le configurazioni, dunque, sono:

- a. $\sqrt{s} = 1.02 \text{ GeV}$, $E_{\min}^{\pm} = 0.408 \text{ GeV}$, $\vartheta_{\mp} = 20 \div 160 \text{ gradi}$, $\xi_{\max} = 10 \text{ gradi}$;
- b. $\sqrt{s} = 1.02 \text{ GeV}$, $E_{\min}^{\pm} = 0.408 \text{ GeV}$, $\vartheta_{\mp} = 55 \div 125 \text{ gradi}$, $\xi_{\max} = 10 \text{ gradi}$;

(a) Compatibilità a vari ϵ : sezione d'urto completa.(b) Compatibilità a vari ϵ : $\mathcal{O}(\alpha)$.Figura 4.1: Compatibilità a vari ϵ per la sezione d'urto totale.

- c. $\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}$, $E_{\min}^{\pm} = 4 \text{ GeV}$, $\vartheta_{\mp} = 20 \div 160 \text{ gradi}$, $\xi_{\max} = 10 \text{ gradi}$;
d. $\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}$, $E_{\min}^{\pm} = 4 \text{ GeV}$, $\vartheta_{\mp} = 55 \div 125 \text{ gradi}$, $\xi_{\max} = 10 \text{ gradi}$.

Le sezioni d'urto integrate sono riportate in Tabella 4.1. Avendo simulato un numero elevato di eventi ($\sim 10^{10}$) le cifre riportate in Tabella sono affette da errore statistico trascurabile sulla scala dei valori numerici riportati. Si noti, poi, che non ci si è limitati all'analisi del processo più completo (σ^{matched}), pienamente esponenziato, corretto con il matching, ma si sono volute sfruttare le potenzialità di BABAYAGA per effettuare uno studio approfondito dell'importanza dei vari contributi, come verrà mostrato nel seguito.

	a.	b.	c.	d.
σ_0 , α costante	6855.7	529.46	71.332	5.5025
σ_0 , α running	6976.6	542.67	74.764	5.8553
$\sigma^{\text{esatta}(\alpha)}$	6170.7	463.16	62.773	4.7089
$\sigma^{\text{PS}(\alpha)}$	6194.9	466.21	63.031	4.7419
σ^{matched}	6197.1	467.51	63.321	4.7932
σ^{PS}	6218.7	470.15	63.539	4.8209

Tabella 4.1: Sezioni d'urto calcolate con BABAYAGA (in nb).

Sono state studiate anche le distribuzioni differenziali della sezione d'urto in funzione di diverse quantità misurabili. In figura 4.2 e in figura 4.3 vengono mostrate insieme la sezione d'urto pienamente esponenziata e quella a $\mathcal{O}(\alpha)$: si noti come, pur avendo lo stesso andamento, non siano perfettamente coincidenti, ma piuttosto si discostino, soprattutto nelle distribuzioni di quelle quantità direttamente legate all'emissione di fotoni. Questa valutazione qualitativa è già di per sé una conferma della necessità di andare oltre il calcolo esatto $\mathcal{O}(\alpha)$, come sarà mostrato meglio nel paragrafo 4.3 con l'analisi dettagliata delle singole correzioni.

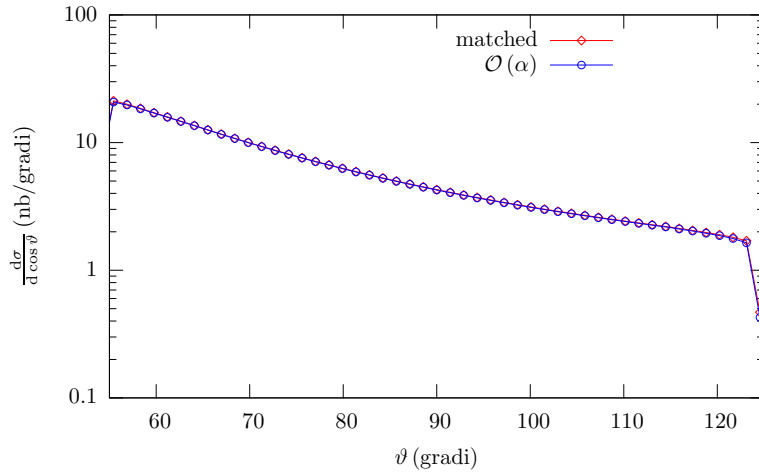
4.3 Contributi alla sezione d'urto totale

Come è già stato più volte accennato, la flessibilità dell'ultima versione di BABAYAGA consente di valutare separatamente i vari fattori che vanno a correggere la sezione d'urto totale calcolata con questo generatore di eventi. Risulta utile valutare questi apporti sotto forma di variazioni relative (percentuali). Sono state, quindi, definite le quantità “ δ ” illustrate di seguito, i cui valori calcolati sulle configurazioni prese in esame sono riportati in tabella 4.2.

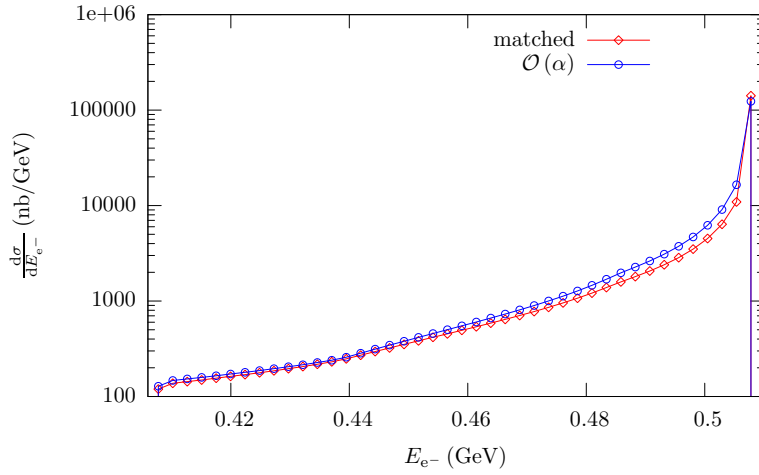
La prima correzione presa in considerazione dà l'effetto che si ha se si tiene conto della possibilità che il fotone virtuale scambiato nel processo polarizzi in fermioni. Questo equivale a considerare la costante di accoppiamento α “running”. Si è, quindi, studiato

$$\delta_{\text{VP}} \equiv \frac{\sigma_0(\alpha \text{ running}) - \sigma_0(\alpha \text{ costante})}{\sigma_0(\alpha \text{ running})}.$$

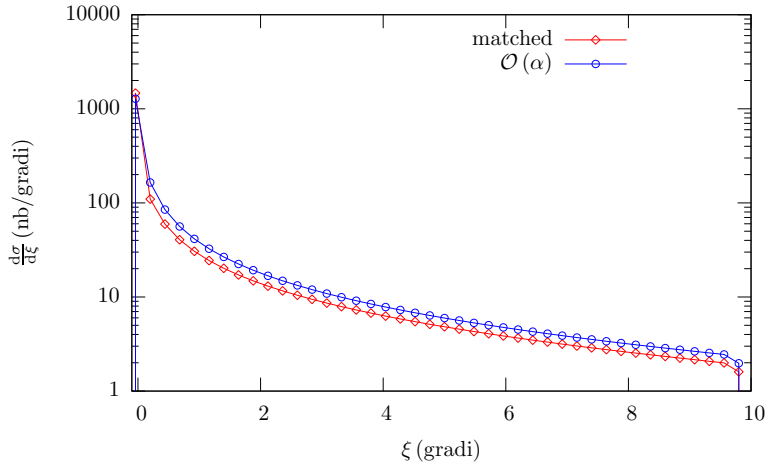
Per la valutazione di $\sigma_0(\alpha \text{ running})$ in BABAYAGA si è fatto uso della routine HADR5N di F. Jegerlehner ([8, 9, 10]), in cui il contributo adronico ad $\alpha(s)$, non calcolabile



(a) Distribuzione in angolo dell'elettrone.

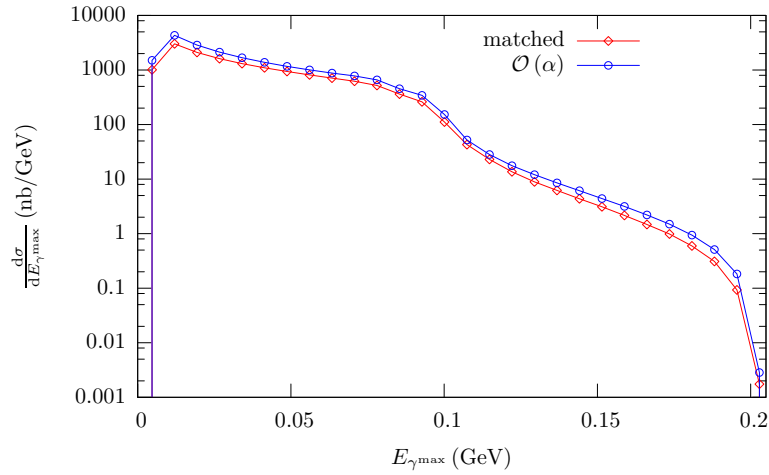


(b) Distribuzione in energia dell'elettrone

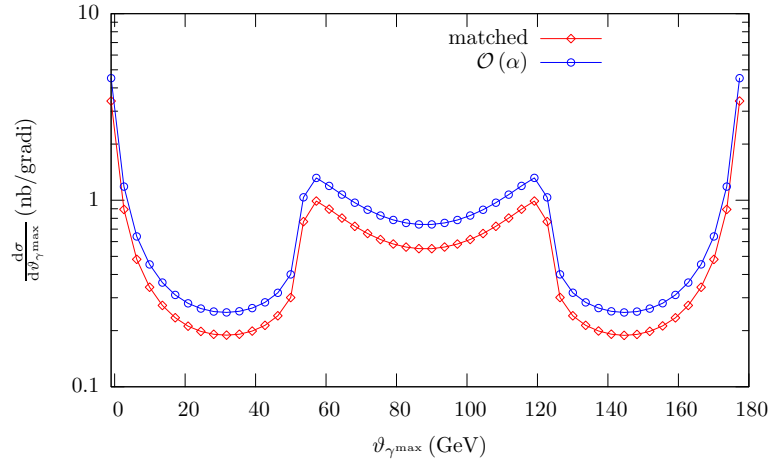


(c) Distribuzione in acollinearità

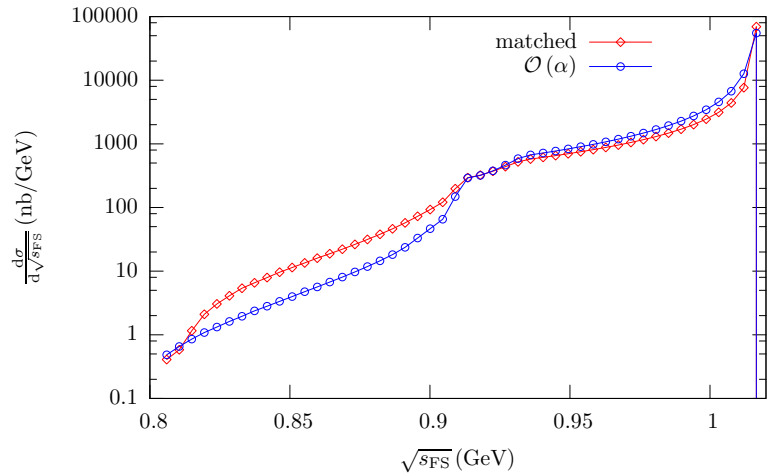
Figura 4.2: Sezioni d'urto differenziali ($\sqrt{s} = 1.02$ GeV, $55 \div 125$ gradi).



(a) Distribuzione in energia del fotone più energetico



(b) Distribuzione in angolo del fotone più energetico



(c) Distribuzione in massa invariante di stato finale.

Figura 4.3: Sezioni d'urto differenziali ($\sqrt{s} = 1.02$ GeV, $55 \div 125$ gradi).

analiticamente per i motivi illustrati nel paragrafo 1.2, è ricavato dai dati sperimentali ed è, pertanto, affetto da errore. L'incidenza di questa incertezza è stata valutata, apportando alcune modifiche al codice sorgente, e si è potuto appurare che è del tutto trascurabile, anche perché risulta dominante sul canale s , che è soppresso rispetto al canale t (vedi figura 1.7).

Si è poi passati ad analizzare il contributo delle correzioni $\mathcal{O}(\alpha)$ esatte, quantificato da:

$$\delta_\alpha \equiv \frac{\sigma^{\text{esatta}(\alpha)} - \sigma_0}{\sigma^{\text{esatta}(\alpha)}}.$$

La sezione d'urto $\sigma^{\text{esatta}(\alpha)}$ comprende, dunque, sia gli effetti delle correzioni fotoniche soffici-virtuali e reali sia quelli della polarizzazione di vuoto risommata à la Dyson.

I termini di ordine superiore (“HO”) nella sezione d'urto derivano direttamente dall’algoritmo Parton Shower e possono essere valutati, in assenza di matching, da

$$\delta_{\text{HO}}^{\text{PS}} \equiv \frac{\sigma^{\text{PS}} - \sigma^{\text{PS}(\alpha)}}{\sigma^{\text{PS}}}$$

e, analogamente nel caso di matching, da:

$$\delta_{\text{HO}} \equiv \frac{\sigma^{\text{matched}} - \sigma^{\text{esatta}(\alpha)}}{\sigma^{\text{matched}}}.$$

Il contributo apportato a $\mathcal{O}(\alpha)$ dal matching è dato da termini non logaritmici (“non – log”) che non derivano, cioè, dal Parton Shower, bensì sono introdotti dal calcolo esatto dell’elemento di matrice a tale ordine. La loro incidenza è misurata da

$$\delta_\alpha^{\text{non-log}} \equiv \frac{\sigma^{\text{esatta}(\alpha)} - \sigma^{\text{PS}(\alpha)}}{\sigma^{\text{esatta}(\alpha)}},$$

la cui esponenziazione a tutti gli ordini è

$$\delta_\infty^{\text{non-log}} \equiv \frac{\sigma^{\text{matched}} - \sigma^{\text{PS}}}{\sigma^{\text{matched}}}.$$

In quest’ultima, tuttavia, sono compresi anche contributi sublogaritmici $\mathcal{O}(\alpha^n L^{n-1})$, gli stessi che rendono δ_{HO} più “ricca” di $\delta_{\text{HO}}^{\text{PS}}$. Dalla relazione:

$$\delta_{\alpha^2 L} \approx \delta_{\text{HO}} - \delta_{\text{HO}}^{\text{PS}} \approx \delta_\infty^{\text{non-log}} - \delta_\alpha^{\text{non-log}}.$$

discende, allora:

$$\delta_{\alpha^2 L} \equiv \frac{\sigma^{\text{matched}} - \sigma^{\text{esatta}(\alpha)} - \sigma^{\text{PS}} + \sigma^{\text{PS}(\alpha)}}{\sigma^{\text{matched}}}.$$

Si passi ora a considerare gli effetti quantitativi delle δ fin qui definite. Questi sono stati ottenuti a partire dai risultati di tabella 4.1 e sono raccolti in tabella 4.2.

La variazione percentuale che si avrebbe se ci si limitasse a considerare α costante è assai rilevante e si aggira attorno al 2% per le configurazioni sperimentali tipiche di DAΦNE, raggiungendo valori superiori (fino a 6.03% nell’accettanza angolare $55 \div 125$ gradi) per le cosiddette B-factories a 10 GeV. I termini $\mathcal{O}(\alpha)$ (e α running), invece, diminuiscono la sezione d'urto, rispetto all’approssimazione di

Born con α running, del 24.35% nelle B-factories con accettazione stretta e approssimativamente del 15% a più basse energie nel centro di massa. Questo particolare comportamento, ovvero l'aumento (in modulo) dell'incidenza delle correzioni in corrispondenza dell'incremento di \sqrt{s} e del restringimento dell'accettazione angolare, è un fenomeno osservabile per tutti i tipi di contributo presi in considerazione. Se ne darà un'interpretazione in conclusione di questo paragrafo.

Complessivamente, dunque, $\sigma^{\text{esatta}(\alpha)}$ risulta considerevolmente ridotta rispetto alla sezione d'urto in approssimazione di Born discussa nel paragrafo 1.3, riduzione che assomma a valori compresi, in modulo, tra l'11.10% e il 16.85%. Il tenerne conto è, quindi, il primo passo nella direzione di migliorare l'accuratezza della sezione d'urto. L'algoritmo Parton Shower fornisce ulteriori correzioni che ci si appresta ora a studiare.

Il vantaggio dell'utilizzo di **BABAYAGA** ed in particolare della versione in esame in questo lavoro è quello di poter considerare nella sezione d'urto del processo Bhabha sia contributi di ordine superiore sia contributi esatti $\mathcal{O}(\alpha)$. L'incidenza dei primi sulle configurazioni considerate è compresa tra lo 0.43% (a.) e l'1.76% (d.). Si tratta di valori che non sono trascurabili nell'ottica del raggiungimento di un'accuratezza dell'1‰. Tali risultati erano, tuttavia, ottenibili anche con le versioni precedenti del codice. La sostanziale novità sta nel contributo portato dal matching, quantificato da $\delta_{\infty}^{\text{non-log}}$. L'ammontare della variazione è stato calcolato come compreso in modulo tra il 3.5‰ e il 5.8‰, con una dipendenza dall'accettazione angolare più che dall'energia nel centro di massa. Si tratta evidentemente di correzioni dello stesso ordine di quelle HO ed è, di conseguenza, possibile concludere che dall'osservazione delle sezioni d'urto totali (integrate) a vari gradi di approssimazione risulta giustificato lo sforzo di prendere in considerazione il calcolo esatto $\mathcal{O}(\alpha)$. La correzione portata dai termini $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$ è, in realtà, soltanto stimata, non essendo stato incluso nel codice il loro calcolo esatto, tuttavia, si dimostra ([31]) che il formalismo della funzione di struttura permette, comunque, di prenderne in considerazione la parte dominante. Può, dunque, essere interpretata come una valutazione approssimata dell'accuratezza di **BABAYAGA**. I valori calcolati, $0.4 \div 1.1\%$, mostrano il pieno raggiungimento dell'obiettivo che ci si era prefissati adottando l'algoritmo Parton Shower per il calcolo del processo Bhabha e correggendolo poi con il matching.

Rimane da discutere un ultimo aspetto, a proposito delle correzioni alla sezione d'urto totale. Come è già stato notato, c'è un comportamento comune a tutte le δ : una forte dipendenza dall'accettazione angolare scelta e dall'energia nel centro di massa, con tendenza ad aumentare in modulo al crescere di \sqrt{s} e al restringersi dell'accettazione. È possibile comprendere questo comportamento studiando il logaritmo collineare che compare nella funzione di struttura e che caratterizza in varia misura tutte le correzioni:

$$L \equiv \ln \frac{Q^2}{m_e^2}.$$

Si dimostra ([24, pag. 63]) che la scelta migliore per Q^2 è:

$$Q^2 \sim \frac{st}{u},$$

dove s , t e u sono gli usuali invarianti cinematici di Mandelstam, da cui segue:

$$(4.1) \quad L \sim \ln \frac{st}{m_e^2 u} = \ln \frac{s(1 - \cos \vartheta)}{m_e^2 (1 + \cos \vartheta)}.$$

La (4.1) per grandi angoli tende a $\ln \frac{s}{m_e^2}$, funzione che cresce monotonamente con l'energia nel centro di massa, mentre per piccoli angoli tende a $\ln \frac{|t|}{m_e^2}$, dove si ha sempre $|t| < s$. Questa interpretazione è confermata che l'incremento è più evidente nelle δ per definizione maggiormente logaritmo-dipendenti.

	a.	b.	c.	d.
δ_{VP}	1.73	2.43	4.59	6.03
δ_α	-13.06	-17.16	-19.10	-24.35
δ_{HO}	0.43	0.93	0.87	1.76
δ_{HO}^{PS}	0.38	0.84	0.80	1.64
$\delta_{\alpha^2 L}$	0.04	0.09	0.06	0.11
$\delta_\alpha^{\text{non-log}}$	-0.39	-0.66	-0.41	-0.70
$\delta_\infty^{\text{non-log}}$	-0.35	-0.56	-0.34	-0.58

Tabella 4.2: Contributi correttivi (in termini relativi percentuali).

4.4 Distribuzioni

Oltre all'analisi delle correzioni sulla sezione d'urto totale, BABAYAGA rende possibile anche quella di tutte le distribuzioni differenziali. In particolare, in questo paragrafo si vogliono mostrare, per alcune delle “ δ ” definite nel paragrafo precedente:

- la distribuzione angolare dell'elettrone;
- la distribuzione in energia dell'elettrone;
- la distribuzione in acollinearità;
- la distribuzione in energia del fotone più energetico;
- la distribuzione in angolo del fotone più energetico;
- la distribuzione in massa invariante di stato finale.

Per quanto riguarda i punti d. ed e., vengono presi in considerazione soltanto quegli eventi per cui $E_{\gamma\text{max}} > 0.02 \cdot E_{e^-}$. Si è scelto di studiare nel dettaglio la configurazione b., a bassa energia ed accettazione angolare stretta perché è caratteristica per l'esperimento KLOE a DAΦNE. A partire da pag. 50 si trovano i grafici, qui di seguito brevemente commentati.

In figura 4.4 è rappresentato l'effetto delle correzioni $\mathcal{O}(\alpha)$ per la distribuzione angolare dell'elettrone. È possibile notare che, mediamente, il loro impatto è di circa $15 \div 20\%$, di segno negativo, in accordo con quanto mostrato in tabella 4.2, mentre i marcati effetti di bordo sono di origine cinematica. Si noti che l'unica distribuzione significativa per δ_α è quella mostrata, in quanto nella sezione d'urto Born si ha un solo “bin” non nullo, a differenza di quanto accade per $\sigma^{\text{esatta}(\alpha)}$.

In figura 4.5 e in figura 4.6 si esaminano, invece, i contributi di ordine superiore. Anche in questo caso i risultati del precedente paragrafo sono recuperati in media, sebbene in alcuni punti δ_{HO} valga anche il 50% in modulo.

Considerazioni analoghe possono essere fatte a proposito delle distribuzioni di $\delta_{\alpha^2 L}$ (figura 4.7 e figura 4.8). Si noti, tuttavia, come nelle regioni caratterizzate da emissione di fotoni, la correzione è di segno negativo: ancora una volta il dato totale è riottenuto a livello medio, considerando che la sezione d'urto differenziale è maggiore laddove l'energia del fascio rimane inalterata.

Le distribuzioni di $\delta_{\alpha}^{\text{non-log}}$, mostrate in figura 4.9 e in figura 4.10, sono praticamente costanti sui parametri elettronici, mentre presenta un andamento più interessante su quelli fotonici, dove risulta particolarmente evidente la dipendenza dai tagli sperimentali scelti.

4.5 Confronto con calcoli indipendenti

A titolo di verifica e di controllo del programma, i risultati ottenuti con **BABAYAGA** sono stati confrontati con quelli di due codici indipendenti: **BHWIDE** ([32]) e **LABSPV** ([24, pagg. 50-53] e [33]).

BHWIDE è un generatore d'eventi Monte Carlo basato sull'approccio di esponenziazione YFS esplicita ([29]), mentre **LABSPV** è un integratore, sempre Monte Carlo, sviluppato anch'esso dal gruppo di ricerca in fisica delle alte energie della Sezione di Pavia dell'INFN e del Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica dell'Università. A differenza di **BABAYAGA**, non sfrutta il Parton Shower, bensì un approccio "inclusivo" basato sulle funzioni di struttura collineari, in cui non si ha memoria dei singoli eventi (che, infatti, non vengono generati) e della cinematica dei fotoni emessi. In tabella 4.3 sono presentati i risultati ottenuti con i tre codici per le configurazioni a bassa energia a. e b. definite nel paragrafo 4.2. Il confronto è stato effettuato tra valori di sezione d'urto simulati senza considerare la polarizzazione di vuoto, al fine di garantire la massima compatibilità tra i metodi di calcolo, considerate le particolari modalità con cui è possibile valutare α running.

	a.	b.
σ^{matched}	6086.61 (2)	455.853 (4)
σ_{BHWIDE}	6086.3 (2)	455.73 (1)
σ_{LABSPV}	6088.5 (3)	456.19 (1)

Tabella 4.3: Confronto tra sezioni d'urto totali calcolate con **BHWIDE**, con **LABSPV** e con **BABAYAGA** (in nb).

Come si può osservare c'è un ottimo accordo tra i dati ottenuti, con differenze dell'ordine dello 0.1%. Questo fatto, unitamente all'elevata accuratezza teorica raggiunta, discussa nei paragrafi precedenti, permette di sostenere che sia stato raggiunto l'obiettivo che ci si era inizialmente prefissati e che **BABAYAGA** possa essere utilizzato con successo dalle collaborazioni sperimentali che operano alle flavour factory.

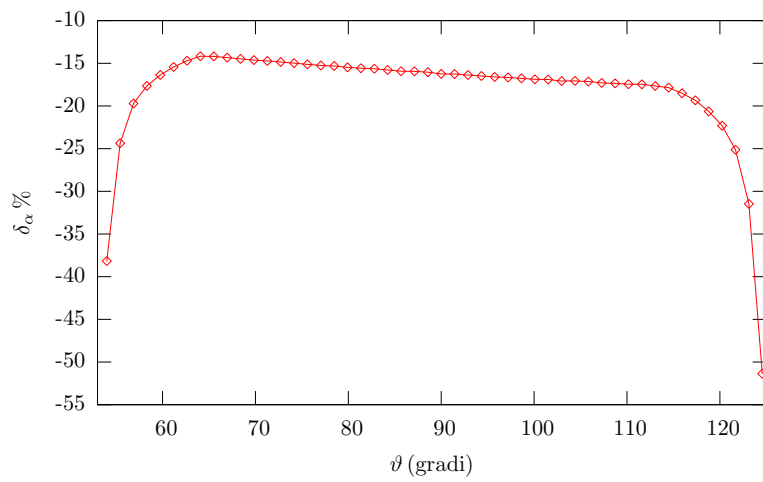
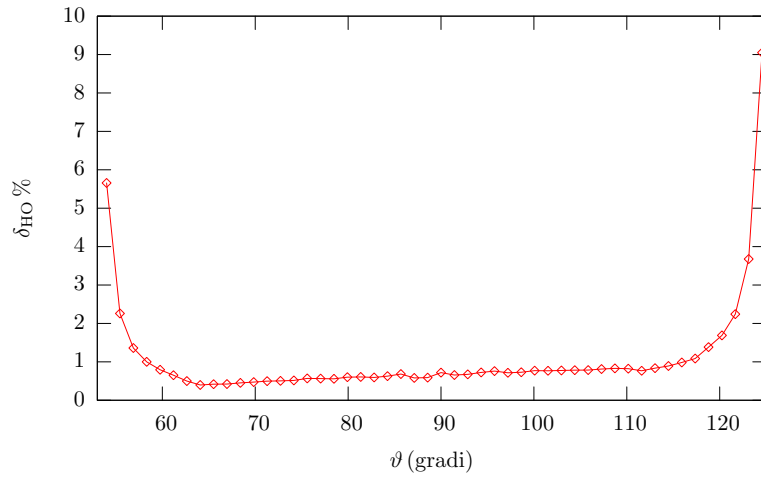
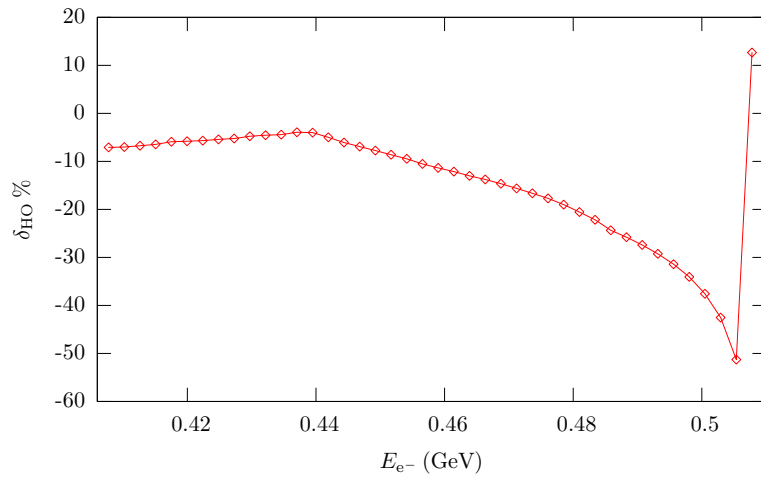


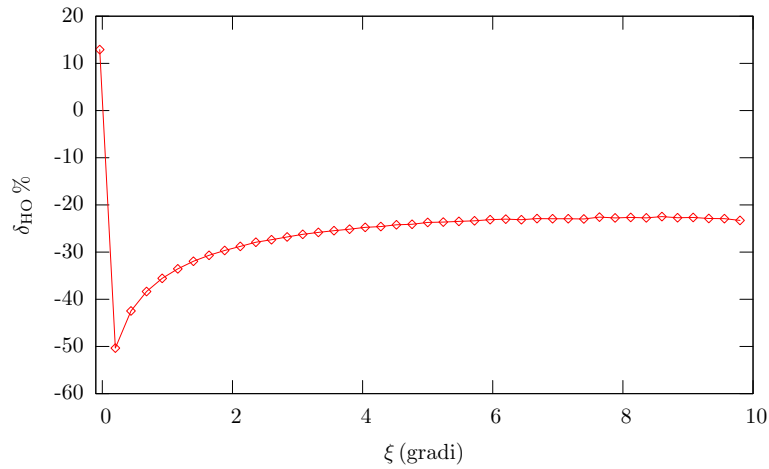
Figura 4.4: Distribuzione in angolo dell'elettrone per δ_α ($\sqrt{s} = 1.02$ GeV, $55 \div 125$ gradi).



(a) Distribuzione in angolo dell'elettrone.

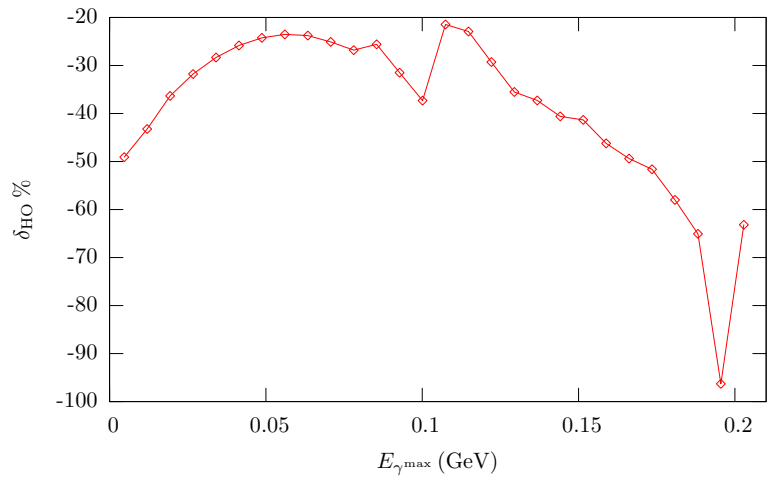


(b) Distribuzione in energia dell'elettrone

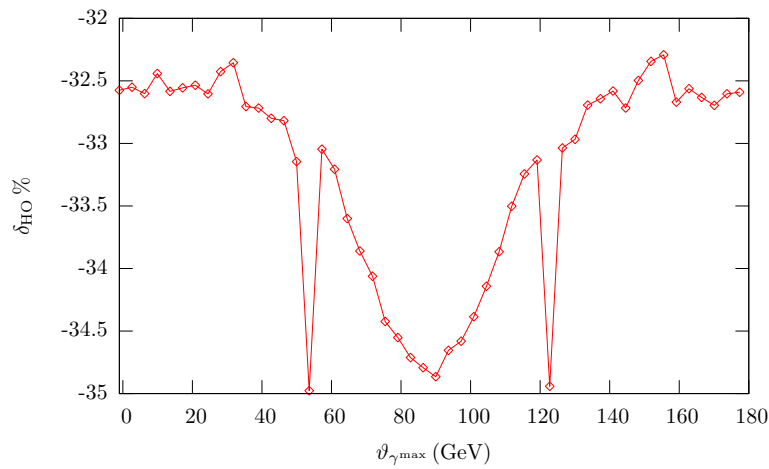


(c) Distribuzione in acollinearità

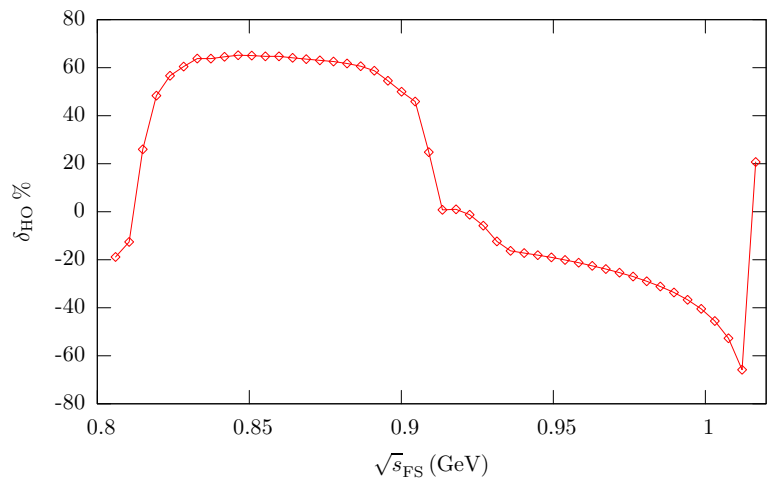
Figura 4.5: Distribuzioni di δ_{HO} ($\sqrt{s} = 1.02$ GeV, $55 \div 125$ gradi).



(a) Distribuzione in energia del fotone più energetico

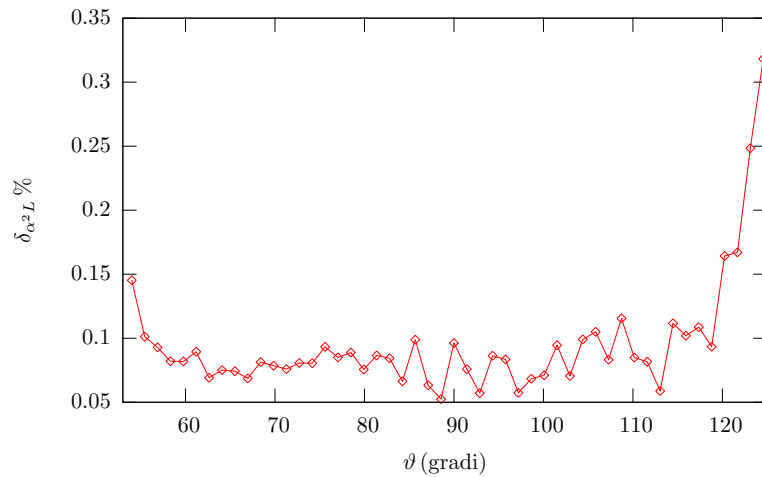


(b) Distribuzione in angolo del fotone più energetico

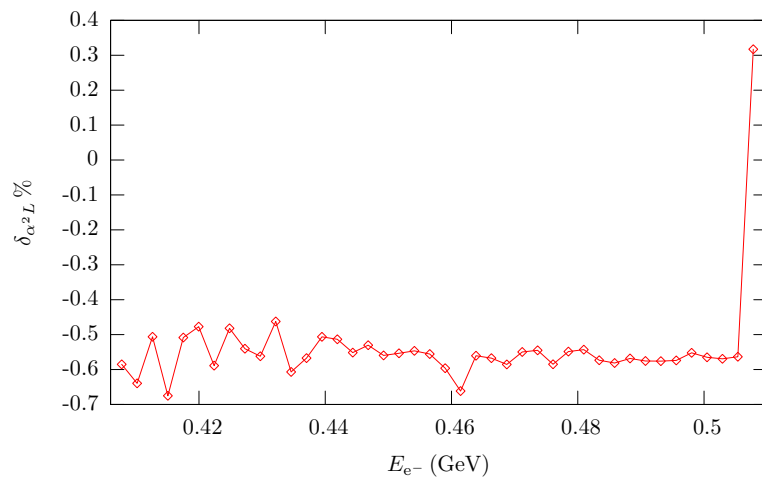


(c) Distribuzione in massa invariante di stato finale.

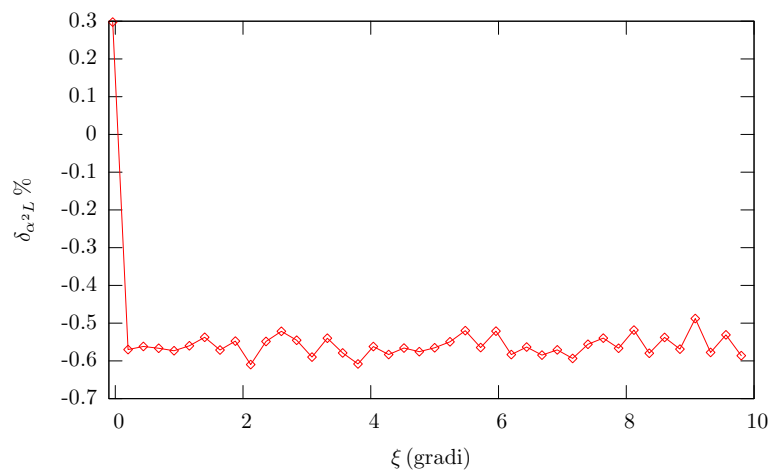
Figura 4.6: Altre distribuzioni di δ_{HO} ($\sqrt{s} = 1.02$ GeV, $55 \div 125$ gradi).



(a) Distribuzione in angolo dell'elettrone.

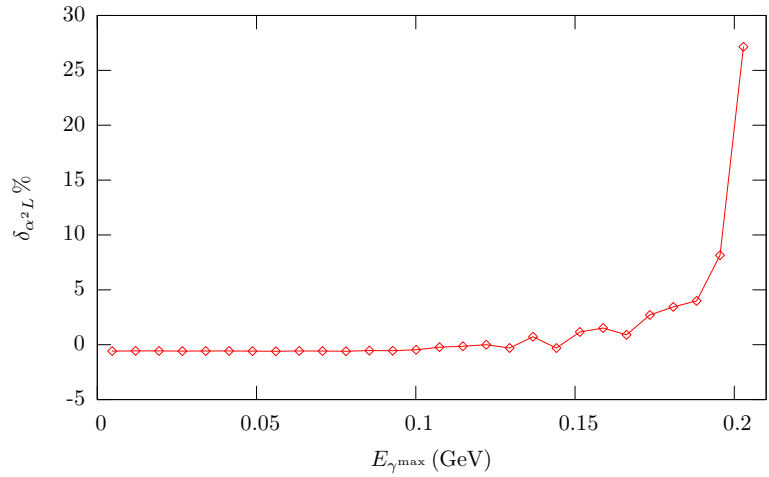


(b) Distribuzione in energia dell'elettrone

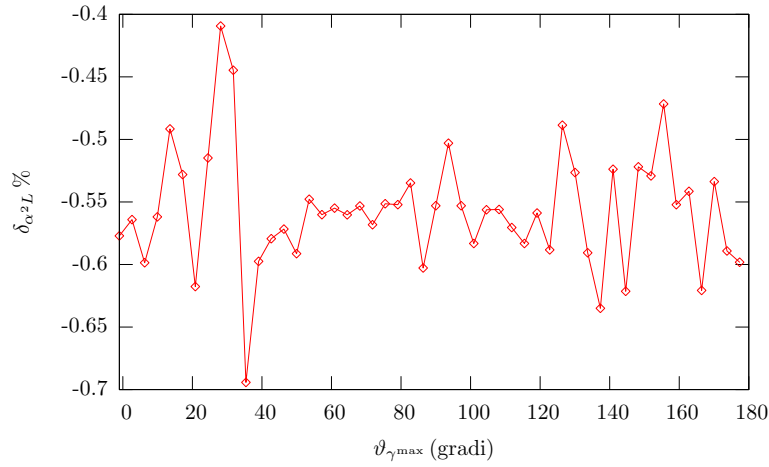


(c) Distribuzione in acollinearità

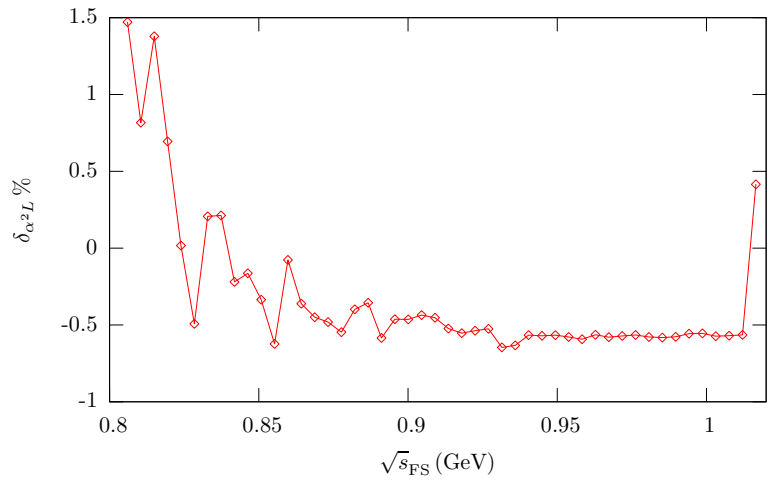
Figura 4.7: Distribuzioni di $\delta_{\alpha^2 L}$ ($\sqrt{s} = 1.02 \text{ GeV}$, $55 \div 125$ gradi).



(a) Distribuzione in energia del fotone più energetico

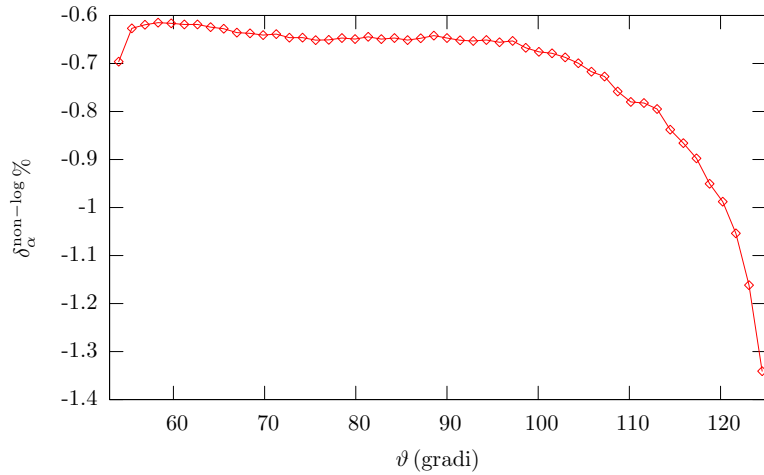


(b) Distribuzione in angolo del fotone più energetico

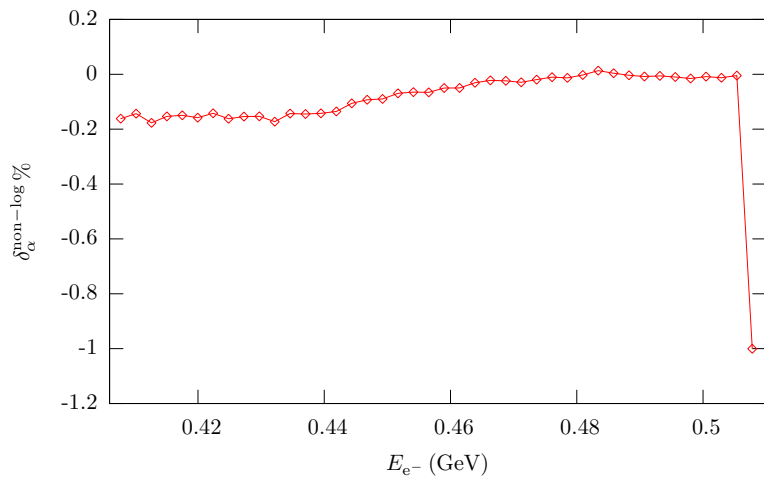


(c) Distribuzione in massa invariante di stato finale.

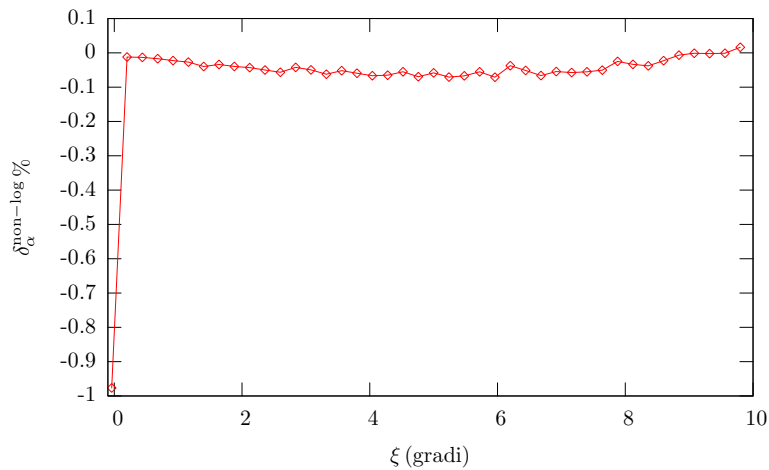
Figura 4.8: Altre distribuzioni di $\delta_{\alpha^2 L}$ ($\sqrt{s} = 1.02$ GeV, $55 \div 125$ gradi).



(a) Distribuzione in angolo dell'elettrone.

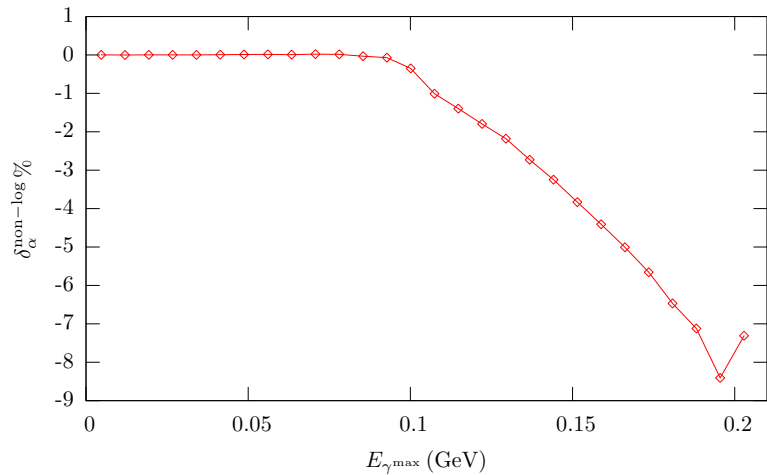


(b) Distribuzione in energia dell'elettrone

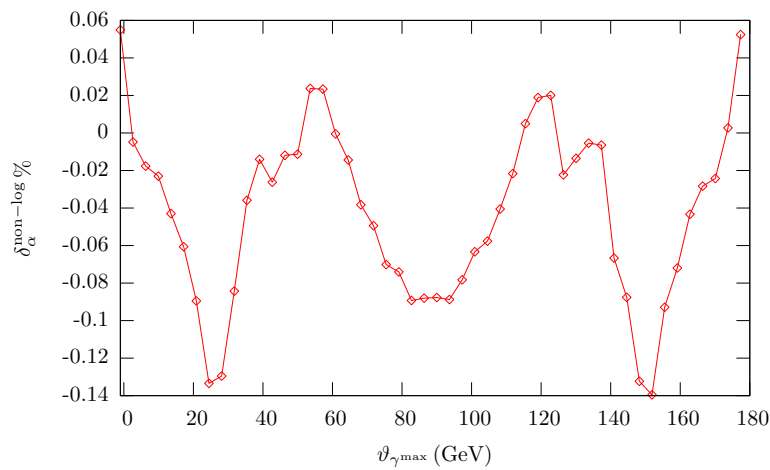


(c) Distribuzione in acollinearità

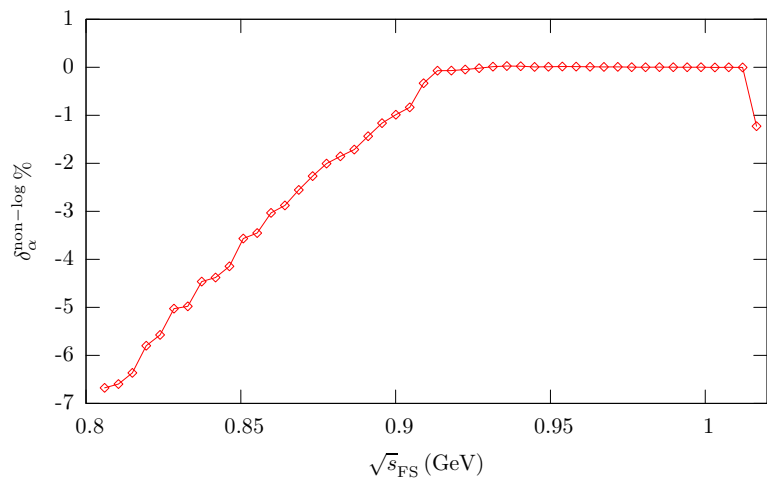
Figura 4.9: Distribuzioni di $\delta_\alpha^{\text{non-log}}$ ($\sqrt{s} = 1.02 \text{ GeV}$, $55 \div 125$ gradi).



(a) Distribuzione in energia del fotone più energetico



(b) Distribuzione in angolo del fotone più energetico



(c) Distribuzione in massa invariante di stato finale.

Figura 4.10: Altre distribuzioni di $\delta_{\alpha}^{\text{non-log}}$ ($\sqrt{s} = 1.02$ GeV, $55 \div 125$ gradi).

Conclusioni

Lo studio di alcuni importanti parametri del Modello Standard richiede la valutazione, presso acceleratori a bassa energia, del rapporto R . Si rende, quindi, necessario conoscere la luminosità di queste macchine, mediante il calcolo di precisione del processo Bhabha $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$. Per ottenere un'accuratezza di circa lo 0.1%, nell'ambito delle attività del gruppo di ricerca in fisica teorica delle alte energie della Sezione di Pavia dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare e del Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica dell'Università, è stato realizzato **BABAYAGA**, un generatore d'eventi Monte Carlo che adatta all'Elettrodinamica Quantistica tecniche di QCD, le equazioni di Altarelli-Parisi.

Esse sono ricavate applicando un approccio probabilistico allo studio dell'emissione di fotoni da parte dei leptoni coinvolti in un processo di interazione, come, ad esempio, il Bhabha. La risoluzione delle equazioni di Altarelli-Parisi può essere effettuata iterativamente con un procedimento che prende il nome di Parton Shower. Questo consiste sostanzialmente in un particolare sviluppo in serie di potenze del prodotto tra la costante di accoppiamento dell'Elettrodinamica Quantistica α e di un fattore logaritmico L , detto logaritmo collineare, caratteristico del calcolo esplicito delle correzioni radiative. La realizzazione Monte Carlo dell'algoritmo Parton Shower costituisce il nucleo centrale di **BABAYAGA**. Il metodo seguito ha il pregio di esponenziare le correzioni radiative alla sezione d'urto a tutti gli ordini di αL , sebbene omettendo contributi perturbativi di ordine finito. Poiché, tuttavia, il calcolo esatto $\mathcal{O}(\alpha)$ del processo Bhabha è noto in letteratura, si è ritenuto che inserirlo nel codice e sostituirlo al corrispettivo approssimato, in modo da evitare doppi conteggi allo stesso ordine, potesse portare ad una riduzione dell'errore teorico. Tale introduzione è stata effettuata con un procedimento originale chiamato "matching".

Allo scopo di stabilire l'accuratezza della nuova versione del generatore di eventi Monte Carlo **BABAYAGA** si è reso, dunque, necessario valutare nel dettaglio l'ammontare delle diverse correzioni per osservare il grado con cui ciascuna di esse contribuisce alla precisione complessiva. In altre parole, si sono presi in considerazione valori della sezione d'urto calcolati con campioni di eventi generati a diversi gradi di approssimazione, ovvero aggiungendo di volta in volta nuovi termini al Parton Shower, e sono stati quindi confrontati tra loro. In particolare, si sono progressivamente visti gli effetti della polarizzazione di vuoto sulla sezione d'urto Born, quelli del calcolo esatto a $\mathcal{O}(\alpha)$, i fattori logaritmici e sublogaritmici, in presenza di matching o meno.

È stato così verificato che gli apporti dominanti sono quelli derivanti dall'utilizzo di α running e dei termini $\mathcal{O}(\alpha)$ esatto, che valgono, mediamente ed in modulo, rispettivamente attorno al 3.5% e al 18.5% per quattro configurazioni sperimentali scelte tra le più tipiche nelle flavour factory. Ad ordini superiori di α , l'ammontare

delle correzioni si riduce di almeno un ordine di grandezza, ma rimane comunque importante al fine di ottenere la precisione teorica richiesta. L'utilizzo del Parton Shower, senza ulteriori migliorie, infatti, porta da solo contributi relativi dell'0.84% a bassa energia nel centro di massa e accettazione angolare stretta, contributi che salgono al 0.93% se si considera anche il matching. Quest'ultimo introduce due tipi di correzione, una data da termini non logaritmici corrispondenti al calcolo esatto $\mathcal{O}(\alpha)$ finito ed una derivante, invece, dalla loro propagazione a tutti gli ordini mediante Parton Shower, che fornisce elementi sublogaritmici $\mathcal{O}(\alpha^n L^{n-1})$ (sostanzialmente $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$).

La verifica della affidabilità dei risultati ottenuti dalla generazione di eventi mediante BABAYAGA è stata effettuata mediante il confronto con calcoli indipendenti, basati cioè su approcci diversi al problema. In particolare si sono presi in considerazione BHWIDE e LABSPV e si è ottenuto un ottimo accordo, con differenze inferiori allo 0.1%. Infine, una prima indicazione dell'accuratezza teorica raggiunta dal generatore d'eventi Monte Carlo può essere ricavata dall'incidenza dei termini $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$. Il loro calcolo esatto, infatti, non è al momento incluso nel codice, tuttavia si ritiene che la stima data dal Parton Shower sia abbastanza precisa, così da rappresentare in buona approssimazione l'errore massimo. Le simulazioni eseguite nel corso della preparazione del presente lavoro di tesi portano a concludere che questo in media si aggira approssimativamente attorno allo 0.08%. Si può pertanto affermare che l'accuratezza teorica dell'attuale versione del generatore d'eventi Monte Carlo BABAYAGA è dell'ordine dello 0.1% o inferiore.

Avendo osservato i risultati esposti precedentemente, si è passati alla messa a punto di BABAYAGA all'utilizzo "sul campo" da parte delle collaborazioni sperimentali alle flavour factory, in particolare KLOE a DAΦNE.

Sono, inoltre, in previsione altri sviluppi del generatore di eventi, come la sua estensione alla simulazione di processi con stati finali $\gamma\gamma$ e $\mu^+\mu^-$, sempre tenendo conto delle correzioni radiative Parton Shower con matching $\mathcal{O}(\alpha)$. È altresì possibile pensare di ridurre ulteriormente l'errore teorico di BABAYAGA includendo contributi esatti $\mathcal{O}(\alpha^2)$, già parzialmente noti in letteratura. Si vorrebbe, in altre parole, generalizzare il matching al secondo ordine perturbativo.

Appendice A

Calcoli

A.1 Somma sulle polarizzazioni per il fotone

Questa breve trattazione è ripresa da [12, pagine 144-146].

L'elettrodinamica quantistica è una teoria gauge-invariante. Questo implica che anche gli elementi di matrice soddisfino allo stesso requisito. Affinché questo sia vero, però, bisogna prestare particolare attenzione al comportamento dei fotoni.

Un generico processo coinvolgente fotoni esterni (reali) avrà un'ampiezza di Feynman nella forma generale:

$$\mathcal{M} = \varepsilon_\alpha(q_1, \sigma_1) \varepsilon_\beta(q_2, \sigma_2) \dots \mathcal{M}^{\alpha, \beta, \dots}(q_1, q_2, \dots),$$

dove il tensore $\mathcal{M}^{\alpha, \beta, \dots}(q_1, q_2, \dots)$ è indipendente dai vettori di polarizzazione (che si possono prendere reali) dei fotoni. Questi risultano, tuttavia, essere dipendenti dal gauge scelto: infatti, se nel gauge di Lorentz, si considera una soluzione dell'equazione

$$\square A_\mu(x) = 0$$

in forma di onda piana

$$A_\mu(x) \sim \varepsilon_\mu(q, \sigma) e^{\pm i q \cdot x},$$

la trasformazione

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$$

con

$$f(x) = \tilde{f}(q) e^{\pm i q \cdot x}$$

implica

$$\varepsilon_\mu(q, \sigma) e^{i q \cdot x} \rightarrow \left[\varepsilon_\mu(q, \sigma) \pm i q_\mu \tilde{f}(q) \right].$$

Ne segue che, per mantenere \mathcal{M} gauge-invariante occorre che sia:

$$q_{1\alpha} \mathcal{M}^{\alpha, \beta, \dots} = q_{2\beta} \mathcal{M}^{\alpha, \beta, \dots} = \dots = 0.$$

Si consideri, ora, a titolo d'esempio, l'elemento di matrice:

$$(A.1) \quad \mathcal{M}(q, \sigma) = \varepsilon_\alpha(q, \sigma) \mathcal{M}^\alpha(q).$$

La gauge-invarianza impone:

$$q_\alpha \mathcal{M}^\alpha(q) = 0.$$

Affinché si abbia la corretta sezione d'urto non polarizzata, occorre che sia:

$$\sum_{\sigma=1,2} |\mathcal{M}(q, \sigma)|^2 = \mathcal{M}^\alpha(q) \mathcal{M}^{*\beta}(q) \sum_{\sigma=1,2} \varepsilon_\alpha(q, \sigma) \varepsilon_\beta(q, \sigma) \stackrel{!}{=} -\mathcal{M}^\alpha(q) \mathcal{M}^*_{\alpha}(q) .$$

Facendo uso della (A.1) si può osservare che questa relazione è verificata se si assume:

$$\sum_{\sigma=1,2} \varepsilon_\alpha(q, \sigma) \varepsilon_\beta(q, \sigma) = -g_{\alpha\beta} - \frac{1}{(q \cdot n)^2} \left[q^\alpha q^\beta - (q \cdot n) (q^\alpha q^\beta + q^\beta q^\alpha) \right] .$$

A.2 Elementi di matrice con correzioni radiative esatte $\mathcal{O}(\alpha)$

Il contributo soffice-virtuale che appare nella (3.1) di pag. 31 è dato dalla somma di tre addendi, ciascuno dei quali nella forma:

$$d\sigma_{\text{SV}}^{\text{esatta}(\alpha)^i} = d\sigma_0^i \left[1 + 2(\beta_e + \beta_{\text{int.}}) \ln \frac{k_0}{E} + C_F^i + \delta_{\text{SV}}^i \right].$$

dove $i = s, t, st$ è l'indice di canale (vedi pag. 9). Ponendo $c \equiv \cos \vartheta$, $a \equiv \sin \frac{\vartheta}{2}$, $b \equiv \cos \frac{\vartheta}{2}$, dove ϑ è l'angolo di scattering dell'elettrone, e $\beta_e \equiv \frac{2\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{s}{m_e^2} - 1 \right)$, i fattori C_F^i si scrivono ([34]):

$$C_F^s = \frac{3}{2}\beta_e + 2\frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right] + 2\frac{\alpha}{\pi} F(a, b) + \frac{\alpha}{\pi} \left[V^\gamma(s) + 2\frac{c}{1+c^2} A^\gamma(s) \right],$$

$$C_F^{st} = \frac{3}{2}\beta_e + 2\frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \right] + 2\frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{3}{2} \ln a - \ln^2 a \right] + 2\frac{\alpha}{\pi} F(a, b) + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi} [V^\gamma(s) + A^\gamma(s) + V^\gamma(t) + A^\gamma(t)]$$

e

$$C_F^t = \frac{3}{2}\beta_e - 2\frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \right] + 4\frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{3}{2} \ln a - \ln^2 a \right] + 2\frac{\alpha}{\pi} F(a, b) + \frac{\alpha}{\pi} \left[V^\gamma(t) + \frac{b^4 - 1}{b^4 + 1} A^\gamma(t) \right],$$

dove le funzioni $F(a, b)$, $V^\gamma(s)$, $A^\gamma(s)$, $V^\gamma(t)$ e $A^\gamma(t)$ sono date da:

$$F(a, b) = 2(\ln^2 a - \ln^2 b) + S_2(b^2) - S_2(a^2),$$

$$V^\gamma(s) = -c \left[\frac{\ln^2 a}{b^4} + \frac{\ln^2 b}{a^4} \right] + \frac{\ln a}{b^2} - \frac{\ln b}{a^2},$$

$$A^\gamma(s) = -c \left[\frac{\ln^2 a}{b^4} - \frac{\ln^2 b}{a^4} \right] + \frac{\ln a}{b^2} + \frac{\ln b}{a^2},$$

$$V^\gamma(t) = 8 \ln a \ln b + \frac{\pi^2}{4} (1 - b^4) + \frac{1 - b^4}{b^4} \ln^2 a + (1 - b^4) \ln^2 \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{a^2}{b^2} \ln a + a^2 \ln \left(\frac{a}{b} \right)$$

e

$$A^\gamma(t) = -\frac{\pi^2}{4} (1 - b^4) + \frac{1 - b^4}{b^4} \ln^2 a - (1 - b^4) \ln^2 \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{a^2}{b^2} \ln a - a^2 \ln \left(\frac{a}{b} \right).$$

$S_2(x)$ è la funzione dilogaritmo:

$$S_2(x) = - \int_0^x \frac{dy}{y} \ln(1 - y).$$

Infine, $\beta_{\text{int.}} \equiv \frac{2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{t}{u}\right)$ è il fattore angolare di interferenza tra diagrammi con radiazione di stato iniziale e diagrammi con radiazione di stato finale, mentre δ_{SV}^i tiene conto della polarizzazione del vuoto.

Ora, se, nell'ambito del processo Bhabha, si attribuiscono i momenti p_- , p_+ e q_- , q_+ rispettivamente agli stati iniziali e a quelli finali dell'elettrone ($-$) e del positrone ($+$), allora si possono definire gli invarianti cinematici nel modo seguente:

$$(A.4) \quad \begin{cases} s = (p_- + p_-)^2 \\ s' = (q_- + q_-)^2 \\ t = (p_+ - q_+)^2 \\ t' = (p_- - q_-)^2 \\ u = (p_+ - q_-)^2 \\ u' = (p_- - q_+)^2. \end{cases}$$

Per mezzo di tecniche di elicità si calcola l'elemento di matrice necessario per ottenere $d\sigma_{\text{R}}^{\text{esatta}(\alpha)}$ ([35]):

$$(A.5) \quad |\mathcal{M}_{\text{H}}|^2 = e^6 [W_1 + W_2 + W_3] \frac{ss'(s^2 + s'^2) + tt'(t^2 + t'^2) + uu'(u^2 + u'^2)}{ss'tt'} +$$

$$- 4e^6 m_e^2 \left[\frac{1}{(p_-k)^2} \left(\frac{s'}{t} + \frac{t}{s'} + 1 \right)^2 + \frac{1}{(p_+k)^2} \left(\frac{s'}{t'} + \frac{t'}{s'} + 1 \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(q_-k)^2} \left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s} + 1 \right)^2 + \frac{1}{(q_+k)^2} \left(\frac{s}{t'} + \frac{t'}{s} + 1 \right)^2 \right],$$

dove si è posto:

$$\begin{cases} W_1 = \frac{s}{(p_+k)(p_-k)} \\ W_2 = \frac{s'}{(q_+k)(q_-k)} \\ W_3 = -\frac{t}{(p_+k)(p_+k)} - \frac{t'}{(p_-k)(p_-k)} + \frac{u}{(p_+k)(q_-k)} + \frac{u'}{(p_-k)(p_+k)}. \end{cases}$$

Nella (A.5) sono inclusi i contributi di massa fino a $\mathcal{O}\left(\frac{m_e^2}{E^2}\right)$, mentre sono trascurati quelli di ordine superiore.

Nella preparazione del codice **BABAYAGA**, tuttavia, si è preferito ricalcolare *ab initio* gli elementi di matrice, con l'ausilio di **FORM** ([36]).

Bibliografia

- [1] Altarelli, G.: *The Standard Model of particle physics*. 2005. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0510281>.
- [2] Passera, M.: *The standard model prediction of the muon anomalous magnetic moment*. J. Phys., G31:R75–R94, maggio 2005. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0411168>.
- [3] Aloisio, A. *et al.*: *Measurement of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma)$ and extraction of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)$ below 1 GeV with the KLOE detector*. Phys. Lett., B606:12–24, 2005. <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0407048>.
- [4] Czyz, H., A. Grzelinska e E. Nowak-Kubat: *Radiative return method as a tool in hadronic physics*. Acta Phys. Polon., B36:3403–3412, 2005. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0510208>.
- [5] Czyz, H., J. H. Kuhn e G. Rodrigo: *Radiative return at e^+e^- factories*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 116:249–253, 2003. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0211186>.
- [6] Zhao, Z. G.: *Status and prospects of the measurements of R values*. Nucl. Phys. (Proc. Suppl.), B131:223–231, 2004.
- [7] Burkhardt, H. e B. Pietrzyk: *Low energy hadronic contribution to the QED vacuum polarization*. Phys. Rev., D72:057501, 2005. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0506323>.
- [8] Eidelman, S. e F. Jegerlehner: *Hadronic contributions to $g-2$ of the leptons and to the effective fine structure constant $\alpha(M_Z^2)$* . Z. Phys., C67:585–602, 1995. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9502298>.
- [9] Jegerlehner, F.: *Hadronic contributions to the photon vacuum polarization and their role in precision physics*. J. Phys., G29:101–110, 2003. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0104304>.
- [10] Jegerlehner, F.: *The role of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ in precision tests of the standard model*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 131:213–222, 2004. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0312372>.
- [11] Bhabha, H. J.: *The creation of electron pairs by fast charged particles*. Proc. Roy. Soc. Lond., A152, 1935.

- [12] Mandl, F. e G. Shaw: *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, seconda edizione, 1993.
- [13] Lunardini, C.: *Generazione esclusiva di fotoni in elettrodinamica quantistica*, Anno accademico 1996-1997.
- [14] Peskin, M. E. e D. V. Schroeder: *An introduction to quantum field theory*. Perseus Books, 1995.
- [15] Kuraev, E. A. e V. S. Fadin: *On radiative corrections to e^+e^- single photon annihilation at high-energy*. Sov. J. Nucl. Phys., 41:466–472, 1985.
- [16] Altarelli, G. e G. Martinelli: *Radiative corrections to the Z^0 line shape at LEP*. Nel Ellis, J. e R. D. Peccei (curatori): *Physics at LEP*, volume I, pagine 47–57. CERN, 1986.
- [17] Nicosini, O. e L. Trentadue: *Soft photons and second order radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow Z^0$* . Phys. Lett., B196:551, 1987.
- [18] Nicosini, O. e L. Trentadue: *Second order electromagnetic radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow \gamma^*$, $Z^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$* . Z. Phys., C39:479, 1988.
- [19] Berends, F. A., W. L. van Neerven e G. J. H. Burgers: *Higher order radiative corrections at LEP energies*. Nucl. Phys., B297:429, 1988.
- [20] Skrzypek, M. e S. Jadach: *Exact and approximate solutions for the electron nonsinglet structure function in QED*. Z. Phys., C49:577–584, 1991.
- [21] Gribov, V. N. e L. N. Lipatov: *Deep inelastic ep scattering in perturbation theory*. Sov. J. Nucl. Phys., 15, 1972.
- [22] Altarelli, G. e G. Parisi: *Asymptotic freedom in parton language*. Nucl. Phys., B126:298–318, 1977.
- [23] Dokshitzer, Y. L., S. I. Troian e V. A. Khoze: *Collective QCD effects in the structure of final multi-hadron states (in russo)*. Sov. J. Nucl. Phys., 46:712–719, 1987.
- [24] Carloni Calame, C. M.: *Parton Shower approach to QED processes at flavour factories*. tesi di dottorato, Università degli Studi di Pavia - Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica, Anno accademico 2000-2001.
- [25] Odorico, R.: *Exclusive calculations for QCD jets in a Monte Carlo approach*. Nucl. Phys., B172:157, 1980.
- [26] Fujimoto, J., Y. Shimizu e T. Muehisa: *Monte Carlo approach to radiative processes in e^+e^- annihilation*. Prog. Theor. Phys., 90:177–186, 1993.
- [27] Montagna, G., O. Nicosini e F. Piccinini: *Precision physics at LEP*. Riv. Nuovo Cim., 21N9:1–162, 1998. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9802302>.
- [28] Carloni Calame, C. M.: *An improved parton shower algorithm in QED*. Phys. Lett., B520:16–24, 2001. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0103117>.

- [29] Yennie, D. R., S. C. Frautschi e H. Suura: *The infrared divergence phenomena and high-energy processes*. Ann. Phys., 13:379–452, 1961.
- [30] Carloni Calame, C. M., G. Montagna, O. Nicrosini e F. Piccinini: *The BABAYAGA event generator*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 131:48–55, 2004. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0312014>.
- [31] Montagna, G., O. Nicrosini e F. Piccinini: $\mathcal{O}(\alpha^2)$ next-to-leading photonic corrections to small-angle Bhabha scattering in the structure function formalism. Phys. Lett., B385:348–356, 1996. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9605252>.
- [32] Jadach, S., W. Placzek e B. F. L. Ward: *BHWIDE 1.00: $\mathcal{O}(\alpha)$ YFS exponentiated Monte Carlo for Bhabha scattering at wide angles for LEP1/SLC and LEP2*. Phys. Lett., B390:298–308, 1997. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9608412>.
- [33] Carloni Calame, C. M., C. Lunardini, G. Montagna, O. Nicrosini e F. Piccinini: *Large-angle Bhabha scattering and luminosity at flavour factories*. Nucl. Phys., B584:459–479, 2000. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0003268>.
- [34] Caffo, M., E. Remiddi, A. Ouraou, G. Smadja e F. Semeria: *Bhabha scattering*. Nel Altarelli, G., R. Kleiss e C. Verzegnassi (curatori): *Z physics at LEP 1*, volume I, pagine 171–202. CERN, 1989.
- [35] Berends, F. A., R. Kleiss e S. Jadach: *Radiative corrections to muon pair and quark pair production in electron-positron collisions in the Z^0 region*. Nucl. Phys., B202:63–88, 1982.
- [36] Vermaseren, J. A. M.: *New features of FORM*. 2000. <http://arxiv.org/abs/math-ph/0010025h>.

Ringraziamenti

Quando si arriva alla fine di un ciclo, come possono essere gli anni trascorsi all'Università, è quasi un obbligo, ma soprattutto un piacere, ringraziare le persone che per tanto tempo ti sono state vicine, ti hanno ascoltato, aiutato e anche un po' sopportato.

Il guaio è che sono così tante! Qualunque tentativo di elencarle tutte è destinato a fallire, confido quindi nella comprensione e nel perdono degli esclusi, cui va, comunque, l'assicurazione che non è minore il mio affetto nei loro confronti.

Cominciamo dalla fine. Questa tesi non sarebbe mai nata se non fosse stato per Guido Montagna e per Carlo Michel Carloni Calame. So bene che ci vuole una gran pazienza con me: vado aiutato, spronato, incentivato, e in queste cose sono stati entrambi assolutamente fantastici. Con loro voglio ricordare anche Oreste Nicrosini (che ho colpevolmente escluso dai ringraziamenti per la tesi triennale: me ne scuso!) e Fulvio Piccinini. Grazie inoltre a Enrica Cisana e Giacomo Bormetti per l'amicizia e l'ospitalità che mi hanno donato.

Voglio poi ricordare qui, in ordine assolutamente sparso, gli amici che ho avuto il privilegio e l'onore di avere compagni in questi anni passati a studiare Fisica: Marina Dorati, Silvia Entradi, Manuel Pincetti, Annibale Magni, Claudio Viviani, Francesco Conti e Guglielmo Vastola.

La mia vita all'Università non sarebbe sicuramente stata la stessa se non avessi avuto la fortuna di conoscere l'Almo Collegio Borromeo. Qui ho trovato i miei migliori amici, persone il cui affetto spero di non perdere mai: Gabriele Attanasi, Massimiliano Falco, Davide Garassino, Carlo Montalenti, Luca Natile, Davide Raimondo e ancora, *the last but not the least*, Guglielmo Vastola. E poi, Daniele Ronchi, Claudio Tarana, Francesco Marone... L'elenco potrebbe continuare a lungo, mi limito quindi a citare ancora soltanto alcuni tra i Fisici che ho qui incontrato: Fabio Senziani, Carlo Comaschi, Alessandro Bisio, Stefano Facchini, Stefano Dal Conte, Lorenzo Moggio, ...

Voglio ricordare in questa sede anche Beppe Balduzzi, Chicco Rosti, Alberto Prevedini, Davide Fabozzi, Mattia Ratti, Arber Cauli, Paolo Beccarelli, Francesco Orlando e tanti altri ancora.

Un ringraziamento particolare va a Diego Morone, cui è toccato in sorte di introdurmi per primo a Linux. Se questo lavoro è giunto a termine è un po' anche merito suo.

Saluto poi l'amico "Almo Bibliotecario" Claudio Zonta e con lui tutto il personale

del Collegio, in particolare i Sigg.ri Edoardo, Giorgio e Paolo e, naturalmente (come dimenticarlo!), “il Desi”.

Un abbraccio affettuoso a Claudia Percivalle e un grazie anche a Laura Zito.

Infine, il più grande dei ringraziamenti lo devo a Mamma e Papà, per avermi regalato amore e affetto, per avermi appoggiato, per avermi aiutato e incoraggiato.

A tutti, grazie.