

1 Лагранжиан КЭД

Лагранжиан квантовой электродинамики можно построить с помощью принципа калибровочной инвариантности. Лагранжиан свободной частицы со спином 1/2 имеет вид

$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}[i\hat{\partial} - m]\psi \quad (1)$$

Видно, что варьированием его по ψ мы можем получить свободное уравнение Дирака. Этот лагранжиан инвариантен относительно глобальной $U(1)$ -симметрии:

$$\psi \rightarrow e^{ie\phi}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-ie\phi} \quad (2)$$

Калибровочный принцип состоит в том, чтобы расширить эту симметрию до локальной, т.е., считать ϕ зависящим от x . Ясно, что надо ввести калибровочное поле, чтобы скомпенсировать дополнительный член от дифференцирования. Минимальным образом это можно сделать “удлинением производной” т.е., заменой $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$. При этом, вместе с преобразованиями (2)

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\phi. \quad (3)$$

Пока мы не включим в лагранжиан член с производными поля A , это поле не может считаться динамической переменной. Из классической электродинамики мы уже его знаем: $-\frac{1}{4}F^2$, где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4)$$

Итак,

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4}F^2 + \bar{\psi}[i\hat{D} - m]\psi. \quad (5)$$

Квадратичная часть лагранжиана отвечает свободным полям, удовлетворяющим линейным уравнениям. Члены высших степеней соответствуют взаимодействию.

2 Вторичное квантование

Как известно, одночастичная интерпретация релятивистских волновых уравнений осложнена из-за неположительности плотности вероятности, да она и не нужна, поскольку изменение числа частиц при высоких энергиях является хорошо установленным экспериментальным фактом. В чем состоит процедура вторичного квантования? Каноническое квантование состоит в том, чтобы вычислить канонический импульс, а затем наложить канонические коммутационные соотношения (заменяем классические скобки Пуассона на i ×коммутатор).

2.1 Скалярное поле

Продemonстрируем эту процедуру для скалярного нейтрального поля. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (6)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = (\square + m^2)\phi = 0 \quad (7)$$

Теперь вычислим канонический импульс

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad (8)$$

Вычислим тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (9)$$

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{1}{2} (\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2) \quad (10)$$

Канонические коммутационные соотношения выглядят так

$$[\phi(\mathbf{y}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (11)$$

Во-первых, легко убедиться, что мы получим уравнения движения (7) воспользовавшись квантовомеханическим предписанием $\dot{\pi} = i[H, \pi]$ (где $H = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}$). Поэтому, и для классических свободных полей, и для квантованных, мы должны найти общее решение одних и тех же уравнений движения. Как обычно, ищем решение в виде плоских волн. Для квантового случая коэффициенты разложения являются операторами. Решение имеет вид:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\varepsilon} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}], \quad k^0 = \varepsilon = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (12)$$

Мы можем получить правила коммутации для операторов a, a^\dagger , выражая их через операторы ϕ и π . При нашей нормировке они имеют вид

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{p})] = 2\varepsilon(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{p})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{p})] = 0 \quad (13)$$

Теперь мы строим пространство Фока. Это пространство должно быть замкнуто относительно действия операторов $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{p})$. Мы постулируем сначала существование вакуумного состояния $|0\rangle$, которое зануляется при действии на него операторами a , и пополняем пространство всеми образами. Благодаря коммутационным соотношениям (13), достаточно использовать, в качестве базисных векторов, только состояния $a^\dagger(k_1) \dots a^\dagger(k_n) |0\rangle$. При нашей нормировке операторов рождения и уничтожения такие состояния, конечно, не будут являться нормируемыми, но это небольшая проблема, возьмем такие: $\int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \dots \frac{d\mathbf{k}_n}{(2\pi)^3 2\omega_n} f(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n) a^\dagger(\mathbf{k}_1) \dots a^\dagger(\mathbf{k}_n) |0\rangle$. Видно, что, не ограничивая общности, можно считать функцию $f(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n)$ симметричной относительно перестановок аргументов. Легко связать эту функцию с волновой функцией системы тождественных бозонов.

Для КЭД ситуация несколько более сложная из-за, во-первых, наличия фермионов, а во-вторых, калибровочной инвариантности (см. файлы ?? , ??).

Важно, что после квантования операторы поля удовлетворяют гейзенберговским уравнениям движения

$$i\partial_t \hat{\psi}_H = [\hat{\psi}_H, H]$$

Таким образом, представление чисел заполнения является гейзенберговским, то есть эволюционируют операторы, а состояния — нет.

3 Теория возмущений

Мы обсудили квантование свободных полей, а что же делать со взаимодействием, которое представлено в лагранжиане членами степени выше второй? Взаимодействие можно рассматривать по теории возмущений. Для этого естественно перейти в представление взаимодействия, где эволюция состояния исчезает при выключении взаимодействия.

3.1 Представление взаимодействия

Начнем с уравнения Шредингера

$$i\partial_t\Phi_S = H\Phi_S. \quad (14)$$

Если система замкнута, то H не зависит от времени. Конечно, мы знаем представление Гейзенберга, в котором волновая функция выражается через Шредингеровскую следующим образом:

$$\Phi_H = \exp[iHt]\Phi_S$$

Это представление замечательно тем, что волновая функция Φ_H не меняется со временем. С другой стороны, перейти в это представление не всегда возможно. В интересном для нас случае гамильтониан есть сумма

$$H = H_0 + V,$$

где H_0 — свободный гамильтониан, а V — взаимодействие. Определим волновую функцию в представлении взаимодействия следующим образом:

$$\Phi_I = \exp[iH_0t]\Phi_S$$

С помощью (14) получаем следующее уравнение на Φ_I :

$$\begin{aligned} i\partial_t\Phi_I &= V_I(t)\Phi_I, \\ V_I(t) &= \exp[iH_0t]V\exp[-iH_0t] \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно этому определению, в пределе $V \rightarrow 0$ волновая функция Φ_I совпадает с гейзенберговской и поэтому не зависит от времени. Это представление наиболее удобно для вычислений по теории возмущений. Оператор взаимодействия в представлении взаимодействия зависит от времени, поэтому решением уравнения (15) является T -экспонента:

$$\Phi_I(t_2 > t_1) = T \exp\left[-i \int_{t_1}^{t_2} dt V_I(t)\right] \Phi_I(t_1) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} e^{-i\delta t V_I(t_2)} e^{-i\delta t V_I(t_2 - \delta t)} \dots e^{-i\delta t V_I(t_1 + \delta t)} e^{-i\delta t V_I(t_1)} \Phi_I(t_1).$$

Словами это можно сказать так: операторы в прошлом стоят справа. По понятным причинам объект $U(t_2, t_1) = T \exp\left[-i \int_{t_1}^{t_2} dt V_I(t)\right]$ называется оператором эволюции. В физике элементарных частиц, как в теории рассеяния, одним из центральных объектов является S -матрица:

$$S = U(\infty, -\infty) = T \exp\left[-i \int dt V_I(t)\right],$$

то есть, оператор эволюции на бесконечном промежутке времени. Как ее использовать — понятно, такой объект

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle,$$

при нормированных на единицу состояниях, является просто амплитудой перехода $i \rightarrow f$. Конечно, при реально выключающемся взаимодействии, эта величина (и ее квадрат — полная вероятность) была бы вполне хорошей, но поскольку электромагнитное взаимодействие не выключить, то хорошо определенной является вероятность реакции в единицу времени.

3.2 Формула для вероятности распада в единицу времени \dot{W}

Получим формулу для вероятности распада в единицу времени. Запишем S -матрицу в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta(\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_i) iT_{fi} \quad (16)$$

Эта запись, во-первых, содержит нулевой порядок теории возмущений, и, во-вторых, предвосхищает закон сохранения энергии импульса.

Как уже было сказано, состояния с определенным импульсом ненормируемы. В принципе, можно строить нормируемые пакеты, которые уже не обладают определенным импульсом, тем более, что в эксперименте импульс тоже не определен. Однако, такие проблемы встречались и в обычной теории рассеяния, так что логично было их изучать там, а в этом курсе нам из без того дел хватает. Поэтому технически более удобен прием “квантования в ящике”, где собственные состояния свободного гамильтониана дискретны. Конечно, такому подходу не хватает строгости, что, возможно, будет заметно при нашем рассмотрении. Итак, считаем, что все наши квантованные поля помещены в ящик объема V . Чтобы не возиться с граничными условиями, считаем их периодическими. Запишем мнемонические правила для перехода от бесконечного объема к конечному:

$$(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{k}-\mathbf{p})} \rightarrow \int_V d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{k}-\mathbf{p})} = V \delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}}$$

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}}$$

Кроме того, поскольку мы все равно потеряли явную Лоренц-инвариантность, мы хотели бы переопределить операторы рождения-уничтожения

$$a(\mathbf{k}) \rightarrow \sqrt{2\varepsilon V} a_{\mathbf{k}},$$

так что

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}} \quad (17)$$

и, например,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\varepsilon V}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\varepsilon V}} \right] \quad (18)$$

Теперь нормированные состояния строить не трудно. В конечном объеме

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi) \delta(\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i) V \delta_{\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_i} iT_{fi} \quad (19)$$

Возводим в квадрат и получаем

$$W_{fi} = T (2\pi) \delta(\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i) V^2 \delta_{\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_i} |T_{fi}|^2,$$

где мы заменили $\int dt \rightarrow T$. Отсюда мы и получаем вероятность распада в единицу времени:

$$d\dot{W}_{fi} = (2\pi)^4 \delta(\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_i) V |T_{fi}|^2 \prod_f \frac{V d^3 p'_f}{(2\pi)^3},$$

Если мы еще перейдем к нормальным операторам рождения, то естественно определить M_{fi} , так что $T_{fi} = \frac{M_{fi}}{\prod_{i,f} \sqrt{2\varepsilon_{i,f} V}}$ и мы получаем

$$d\dot{W}_{fi} = (2\pi)^4 \delta(\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_i) \frac{V |M_{fi}|^2}{\prod_i (2\varepsilon_i V)} \prod_f \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2\varepsilon_f}$$

Видим, что в случае одной частицы в начале нормировочный объем выпадает. Еще, конечно, экспериментально важный случай — две частицы в начале. Тогда вероятность стремится к нулю при $V \rightarrow \infty$, что и понятно, так как отражает тот факт, что в большом море вероятность встречи кораблей мала. Просто условия эксперимента соответствуют конечной плотности потока частиц, а $d\dot{W}_{fi} = j d\sigma_{fi}$. Инвариантный поток определяется так:

$$j = \frac{I}{V\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) |\mathbf{p}| \quad (20)$$

В системе покоя одной частицы (для определенности, 2) получаем $j = v_1/V$, то есть, стандартное выражение для плотности потока. ($1/V$ — плотность). Поэтому получаем для сечения

$$d\sigma_{fi} = \frac{d\dot{W}_{fi}}{j} = (2\pi)^4 \delta(\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_i) \frac{|M_{fi}|^2}{4I} \prod_f \frac{V d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2\varepsilon_f V} \quad (21)$$

3.2.1 Формулы для сечения и вероятности распада в случае двухчастичного конечного состояния

Получим формулы для сечения и вероятности распада в случае двухчастичного конечного состояния. В случае распада одной частицы массы m имеем в ее системе покоя

$$\begin{aligned} d\Gamma &= (2\pi)^4 \delta(p'_1 + p'_2 - p) \frac{|M_{fi}|^2}{2m} \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_1} \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_2} \\ &= 2\pi \delta(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - m) \frac{|M_{fi}|^2}{2m} \frac{d\Omega p'_1 dp'_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_1 2\varepsilon'_2} = \frac{|M_{fi}|^2}{32\pi^2 m^2} |\mathbf{p}'| d\Omega. \end{aligned}$$

Аналогично поступая для сечения, получаем

$$d\sigma = \frac{|M_{fi}|^2}{64\pi^2 s} \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} d\Omega. \quad (22)$$

Если мы учтем, что после усреднения по поляризациям сечение не зависит от азимутального угла, то получим

$$d\Omega = 2\pi d \cos \theta = \frac{\pi dt}{|\mathbf{p}'| |\mathbf{p}|} \quad (23)$$

и, с учетом этого, получаем для неполяризованного случая

$$d\sigma = \sum \overline{|M_{fi}|^2} \frac{dt}{64\pi s |\mathbf{p}|^2} = \sum \overline{|M_{fi}|^2} \frac{dt}{64\pi I^2} \quad (24)$$

3.2.2 Стационарное внешнее поле

Что изменится в случае стационарного внешнего поля? А будет уже неправильным предвосхищенный нами закон сохранения импульса. Поэтому мы получим

$$d\dot{W}_{fi} = (2\pi) \delta(\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i) |T_{fi}|^2 \prod_f \frac{V d^3 p'_f}{(2\pi)^3} = 2\pi \delta(\mathcal{E}_f - \varepsilon_1) \frac{|M_{fi}|^2}{2\varepsilon_1 V} \prod_f \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2\varepsilon_f} \quad (25)$$

и опять хорошо определенной величиной будет сечение

$$d\sigma_{fi} = \frac{d\dot{W}_{fi}}{j} = 2\pi \delta(\mathcal{E}_f - \varepsilon_1) \frac{|M_{fi}|^2}{2|\mathbf{p}_1|} \prod_f \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2\varepsilon_f} \quad (26)$$

Только следует учесть, что теперь связь S с T или M будет уже другой, без $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i)$.

4 Правила Фейнмана для КЭД

В принципе, мы уже можем вычислять матричные элементы. В случае КЭД взаимодействие не содержит производных, поэтому гамильтониан взаимодействия равен минус лагранжиану, и мы имеем следующее выражение для S -матрицы

$$S = T \exp \left[-ie \int dx \bar{\psi} \hat{A} \psi \right]. \quad (27)$$

Допустим, для определенности, мы хотим вычислить сечение комптоновского рассеяния. Соответственно, мы интересуемся матричным элементом

$$iM_{fi} = \langle 0 | c(k') a(p') S c^\dagger(k) a^\dagger(p) | 0 \rangle \quad (28)$$

Если мы будем раскладываться, то первый неисчезающий порядок — второй:

$$iM_{fi} = -\frac{e^2}{2!} \langle 0 | c(k') a(p') T \int dx \bar{\psi} \hat{A} \psi(x) \int dy \bar{\psi} \hat{A} \psi(y) c^\dagger(k) a^\dagger(p) | 0 \rangle \quad (29)$$

Конечно, мы можем распутать этот матричный элемент, систематически перенося все операторы уничтожения направо (как в квантовой механике при вычислении матричных элементов в осцилляторе), однако, хотелось бы иметь некоторое простое правило, позволяющее этот процесс упростить.

4.1 Теорема Вика

Таким мнемоническим правилом является теорема Вика, утверждающая, что данный матричный элемент выражается через сумму произведений всевозможных спариваний всех операторов. Каждое произведение необходимо умножить на $(-1)^\sigma$, где σ — количество перестановок фермионных операторов, необходимых для данного способа спаривания. Спаривание обозначает вакуумное среднее T -произведения операторов. Для бозонных и фермионных операторов T -произведение определяется так

$$TB_1(x) B_2(y) = \theta(x^0 - y^0) B_1(x) B_2(y) + \theta(y^0 - x^0) B_2(y) B_1(x) \quad (30)$$

$$TF_1(x) F_2(y) = \theta(x^0 - y^0) F_1(x) F_2(y) - \theta(y^0 - x^0) F_2(y) F_1(x) \quad (31)$$


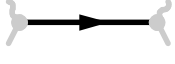




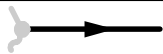
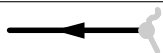

Если для бозонных операторов такое определение естественно появлялось при решении уравнения (15), то для фермионных операторов оно необходимый ингредиент теоремы Вика. Доказательство теоремы Вика см. в ??

Пример 1 В случае комптоновского рассеяния мы имеем четыре ненулевых варианта спаривания. (LaTeX не приспособлен для изображения спариваний). Видим, что есть спаривания, отличающиеся лишь переименованием переменных, причем их как раз столько, чтобы сократить факториал в знаменателе.

4.2 Диаграммы Фейнмана

Диаграммы Фейнмана — это графический способ изобразить спаривания, следующие из теоремы Вика. При небольшом навыке можно сразу рисовать именно диаграммы, а не писать начальный матричный элемент. Понять, откуда берутся правила Фейнмана совсем несложно: представим, что данное спаривание мы изобразим в более понятном виде: разнеся на достаточное расстояние лагранжианы взаимодействия и представив их точкой. Спаривания покажем разными линиями, в зависимости от того, какие операторы они спаривают. Спаривания с операторами из обкладок изобразим линиями, исходящими из вершины и подписанными параметрами соответствующих операторов рождения-уничтожения.

Итак, правила Фейнмана для КЭД:

Элемент диаграммы	Координатное представление, вклад в $(2\pi)^4 \delta(\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_i) iM_{fi}$	Импульсное представление, вклад в iM_{fi}
Фермионная петля		-1
Нечетная перестановка фермионных концов		-1
Нефиксированный импульс		$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$
	$\int \frac{d^4 k e^{-ik(x-y)}}{(2\pi)^4} \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i0} + i \frac{(1-\xi)k_\mu k_\nu}{(k^2+i0)^2} \right)$	$-i \left(\frac{g_{\mu\nu}}{k^2+i0} - \frac{(1-\xi)k_\mu k_\nu}{(k^2+i0)^2} \right)$
	$\int \frac{d^4 p e^{-ip(x-y)}}{(2\pi)^4} (i) \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i0}$	$i \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i0}$
	$-ie\gamma^\mu \int d^4 x$	$-ie\gamma^\mu$
	$e_\mu e^{-ikx}$	e_μ
	$e_\mu^* e^{ikx}$	e_μ^*
	$u_p e^{-ipx}$	u_p
	$\bar{u}_p e^{ipx}$	\bar{u}_p
	$\bar{v}_p e^{-ipx}$	\bar{v}
	$v_p e^{ipx}$	v_p

Во внешнем поле правила нужно дополнить....

5 Поляризационные состояния частиц

5.1 Поляризационная матрица плотности.

Как известно, матрица плотности используется для статистического описания системы, когда состояние системы не полностью известно. Ввести это понятие можно так. Допустим, мы хотим описать статистическое состояние системы, в котором она находится с вероятностью w_α в чистом квантово-механическом состоянии $|\psi^\alpha\rangle$. При этом, конечно, мы не хотим предполагать ортогональность и линейную независимость системы $|\psi^\alpha\rangle$. Мы считаем лишь, что состояния нормированы, т.е. $\langle\psi^\alpha|\psi^\alpha\rangle = 1$ и что статистическое описание полно, т.е. $\sum_\alpha w_\alpha = 1$. Тогда, вероятность обнаружить систему в состоянии ψ вычисляется как сумма произведений вероятности w_i системе находится в состоянии ψ_i на вероятность найти в состоянии

ψ_i состояние ψ :

$$\begin{aligned} W(\psi) &= \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\langle \psi | \psi^{\alpha} \rangle|^2 = \langle \psi | \rho | \psi \rangle, \\ \rho &= \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\psi^{\alpha}\rangle \langle \psi^{\alpha}|, \end{aligned} \quad (32)$$

Величина ρ называется матрицей плотности. По определению она обладает свойствами

$$\text{Sp } \rho = 1, \quad \rho^{\dagger} = \rho \quad (33)$$

Еще одним важным свойством матрицы плотности, которое вытекает из определений является

$$\text{Sp } \rho^2 \leq 1 \quad (34)$$

Задача 2 Доказать свойство (34).

Задание возможных состояний ψ^{α} и их вероятностей w_{α} является достаточным для определения матрицы плотности, однако, не является необходимым. Выберем какой-нибудь полный набор независимых состояний $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots\}$. Независимость означает, что если вероятность найти систему в состоянии i равна 1 (то есть система находится в состоянии $|i\rangle$), то вероятность ее найти в другом состоянии из набора равна нулю. С математической точки зрения это означает ортонормированность набора:

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}.$$

Тогда матрицу плотности (проложив дважды полный набор) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{i,j} |i\rangle \rho^{ij} \langle j|, \\ \rho^{ij} &= \sum_{\alpha} w_{\alpha} \langle i | \psi^{\alpha} \rangle \langle \psi^{\alpha} | j \rangle. \end{aligned}$$

Видим, что для задания матрицы плотности достаточно задать числа ρ^{ij} . Если мы подразумеваем какой-нибудь базис, то можно задавать матрицу плотности в виде матрицы с элементами ρ^{ij} , отсюда и название. В курсе КЭД нам прежде всего будет важно иметь описание для частично поляризованных состояний с заданным импульсом.

Задача 3 $N > 1$ поляризующих устройств готовят в одинаковых количествах векторные частицы, имеющие проекцию момента 1 на ось z_n , зависящую от номера $n = 1, \dots, N$. детектора следующим образом

$$\mathbf{e}_{z_n} = \mathbf{e}_z \sin\left(\frac{2n\pi}{N+1}\right) + \mathbf{e}_x \cos\left(\frac{2n\pi}{N+1}\right).$$

Затем частицы перемешиваются. Определить получающуюся матрицу плотности и вероятность обнаружения проекции спина +1 на направление $\mathbf{e}_z \sin \theta + \mathbf{e}_x \cos \theta$.

5.1.1 Поляризационная матрица для электронов

Как мы знаем, в нерелятивизме спиновая часть волновой функции со спином 1/2 представлялась двухкомпонентным спинором. Полный набор можно в этом случае выбрать, например, в виде $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Соответственно, матрица плотности имеет размерность 2×2 . Учитывая свойства (33) и (34), мы можем записать нерелятивистскую поляризационную матрицу в виде

$$\rho_{\text{nr}} = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \varphi^{\alpha} \varphi^{\alpha \dagger} = \frac{1}{2} (1 + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\xi}),$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – матрицы Паули, а $\boldsymbol{\xi}$ – вектор, удовлетворяющий условию $\boldsymbol{\xi}^2 \leq 1$.

Задача 4 Показать, что из (34) следует, что $\xi^2 \leq 1$. Показать, что $\xi^2 = 1$ тогда и только тогда, когда состояние чистое.

В релятивизме спиновое состояние электрона характеризуется вектором, который в системе покоя имеет вид $a = (0, \xi)$. Это условие можно записать в релятивистском виде:

$$(a \cdot p) = 0.$$

С другой стороны, в системе покоя четырех компонентный спинор выражается через двухкомпонентный, как мы знаем, так

$$u = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Этих данных достаточно для того, чтобы записать матрицу плотности в произвольной системе. Можно явно сделать буст, а можно выразить в виде правильных сверток с γ -матрицами. Второй путь проще, поэтому пойдем им. Нам в дальнейшем конечно удобно будет работать с таким объектом

$$\rho = \sum_{\alpha} w_{\alpha} u^{\alpha} \bar{u}^{\alpha}$$

Кроме удобства, этот объект еще выделен тем, что его след с любым произведением вида $\gamma^{\mu} \dots \gamma^{\lambda}$ ведет себя как тензор при преобразованиях Лоренца. Поэтому именно этот объект выражается в виде правильных сверток векторов p и a с γ -матрицами. В системе покоя имеем

$$\rho = 2m \begin{pmatrix} \rho_{nr} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

После несложных размышлений, видим, что это выражение можно записать в виде

$$\rho = \frac{1}{2} (\hat{p} + m) (1 + \gamma_5 \hat{a}),$$

а это выражение уже имеет релятивистский вид¹. Неполаризованный случай соответствует $a = 0$.

5.1.2 Поляризационная матрица для позитронов

Вообще, как физическая частица, позитрон от электрона мало чем отличается (знаком заряда), поэтому его матрица плотности имеет ту же форму:

$$\rho_{\text{pos}} = \sum_{\alpha} w_{\alpha} u_{\text{pos}}^{\alpha} \bar{u}_{\text{pos}}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\hat{p} + m) (1 + \gamma_5 \hat{a}) \quad (35)$$

Проблема только в том, что нам бы хотелось описывать позитрон четырехкомпонентным спинором v , который является зарядовым сопряжением от u_{pos} . Поэтому нам более интересен объект $\rho = \sum_{\alpha} w_{\alpha} v^{\alpha} \bar{v}^{\alpha}$. Поскольку

$$v = \gamma^2 u_{\text{pos}}^*, \bar{v} = -u_{\text{pos}}^T \gamma^0 \gamma^2$$

получаем

$$\rho = \sum_{\alpha} w_{\alpha} v^{\alpha} \bar{v}^{\alpha} = \gamma^2 \rho_{\text{pos}}^* \gamma^2 = \frac{1}{2} (\hat{p} - m) (1 + \gamma_5 \hat{a}) \quad (36)$$

Задача 5 Разобраться с выводом (36).

¹Напомним, что $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, что отличается знаком от БЛП

5.1.3 Поляризационная матрица фотонов

Вектор поляризации реального фотона может быть выбран поперечным его импульсу. Поэтому в системе с осью z направленной по импульсу фотона поляризационная матрица имеет только четыре ненулевые компоненты: $\rho_{xx}, \rho_{xy}, \rho_{yx}, \rho_{yy}$. Аналогично случаю нерелятивистской поляризационной матрицы электрона, мы можем записать поляризационную матрицу в виде

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sigma\zeta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Нужно помнить, что в отличие от случая матрицы плотности для нерелятивистского электрона, параметры $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ не являются компонентами вектора. Их физический смысл определен ниже. В неполяризованном случае $\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$. В четырехмерных обозначениях неполяризованная матрица имеет вид

$$\rho_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} w_{\alpha} e_{\mu}^{\alpha} e_{\nu}^{\alpha*} = \begin{cases} 0 & \mu = 0 \vee \nu = 0 \\ \frac{1}{2} (\delta_{ij} - n_i n_j) & \mu = i \wedge \nu = j \end{cases} \quad (38)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega \quad (39)$$

Эту же формулу можно записать компактно, если обозначить $\tilde{k} = (\omega, -\mathbf{k})$. Тогда

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} \tilde{k}_{\nu} + \tilde{k}_{\mu} k_{\nu}}{(k \cdot \tilde{k})} \quad (40)$$

Вследствие поперечности тока в КЭД, фотонная поляризационная матрица сворачивается обоими индексами с поперечной величиной (по крайней мере, в наблюдаемых), то есть, мы всегда с учетом этого можем добавить члены, пропорциональные k_{μ} или k_{ν} . С учетом этого, мы можем использовать такую прескрипцию для матрицы плотности:

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \quad (41)$$

Стоит заметить, что в КХД ситуация другая, поскольку есть самодействие глюонов. Конечно, если мы используем вышеупомянутый рецепт для одного глюона, ничего страшного не случится, так как ток, соответствующий остальным частицам процесса будет поперечен (если они реальные, то есть, находятся на массовой поверхности и имеют физическую поляризацию). Однако, использовать рецепт для нескольких глюонов нельзя. Поскольку в КЭД нет самодействия фотонов, рецепт можно использовать всегда.

5.2 Спиральные состояния

Во многих случаях удобно использовать спиральные состояния частиц. Это поляризационные состояния с определенной проекцией спина на направление движения, которая называется спиральностью. Для безмассовых частиц спиральность является Лоренц-инвариантом.

5.2.1 Спиральные состояния электрона

Оператор спиральности для электрона имеет вид

$$\frac{1}{2} \mathbf{n} \Sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \sigma & 0 \\ 0 & \mathbf{n} \sigma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{p}/p$$

Вообще, этот вид интуитивно понятен, но можно и доказать, исходя из представления группы Лоренца на 4-спинорах.

Возводя этот оператор в квадрат, находим, что его собственными значениями могут быть $\pm 1/2$. То есть, спиральность электрона может быть $\pm 1/2$. В стандартном представлении 4-спинор имеет вид

$$u = \sqrt{\varepsilon + m} \left(\frac{\sigma_{\mathbf{p}}}{\varepsilon + m} \varphi \right),$$

а собственные состояния оператора спиральности определяются следующим условием на φ :

$$(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) \varphi = \pm \varphi$$

В ультрарелятивистском пределе (который совпадает с пределом нулевой массы) мы видим, что операторы $\mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}$ и γ_5 действуют на u одинаково, а так как γ_5 является "лоренц-инвариантом" то, в соответствии с вышесказанным, спиральность безмассового фермиона является лоренц-инвариантом. Для позитрона вид спинора v получим опять с помощью зарядового сопряжения. Получим, что оператор, дающий спиральность позитрона при действии на v имеет вид $-\frac{1}{2} \mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}$.

5.2.2 Спиральные состояния фотона

Как мы знаем, в пространстве векторов оператор углового момента действует так

$$(J^i e)^j = -i \epsilon^{ijk} e^k$$

Соответственно, для фотона спиральность принимает два значения ± 1 и вектора поляризации, им отвечающие в системе координат с импульсом вдоль z , имеют вид

$$e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0)$$

5.3 Физическая поляризация

Как мы знаем из квантовой механики, измерения соответствуют проецированию волновой функции частицы на некоторую заданную. Величина проекции при этом является амплитудой вероятности найти частицу в этом заданном состоянии. Аппаратную функцию детектора также можно описать матрицей плотности

$$\rho_f = \sum_{\beta} \tilde{w}_{\beta} |\tilde{\psi}^{\beta}\rangle \langle \tilde{\psi}^{\beta\dagger}|,$$

только теперь \tilde{w}_{β} характеризует не статистический ансамбль, а эффективность обнаружения состояния $\tilde{\psi}^{\beta}$ детектором. Тогда, если система описывается матрицей ρ_{ph} , то вероятность срабатывания детектора вычисляется так:

$$\sum_{\alpha, \beta} w_{\alpha} \tilde{w}_{\beta} \left| \langle \psi^{\alpha} | \tilde{\psi}^{\beta} \rangle \right|^2 = \text{Sp} [\rho_f \rho_{\text{ph}}]$$

Например, для частицы со спином 1/2 видим, что

$$W = \text{Sp} [\rho_f \rho_{\text{ph}}] = \frac{1}{2} (1 + \boldsymbol{\xi}_f \cdot \boldsymbol{\xi}_{\text{ph}})$$

Для фотона с помощью этой формулы мы можем определить смысл параметров Стокса. Например, пусть наш прибор детектирует линейную поляризацию вдоль оси x , тогда $\rho_f^{ij} = e_x^i e_x^j$, и мы получаем вероятность регистрации такой поляризации

$$W(\mathbf{e}_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + \zeta_3)/2 & (\zeta_1 - i\zeta_2)/2 \\ (\zeta_1 + i\zeta_2)/2 & (1 - \zeta_3)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 + \zeta_3)/2$$

То есть, $(1 + \zeta_3)/2$ характеризует степень линейной поляризации вдоль оси x . Действуя аналогично, получаем

$$\begin{aligned} W(\mathbf{e}_y) &= (1 - \zeta_3)/2 \\ W\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm \mathbf{e}_y)\right) &= (1 \pm \zeta_1)/2 \\ W\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)\right) &= (1 \pm \zeta_2)/2 \end{aligned}$$

6 Перекрестная инвариантность, инвариантные амплитуды

Сравним амплитуды процессов, в которых некоторые начальные частицы заменены на конечные античастицы и наоборот. Они изображаются одними диаграммами, в которых лишь внешним линиям сопоставляются различные элементы. Если бы частицы нашей теории были скалярными, то, очевидно, амплитуды в разных каналах давались бы одной функцией инвариантов. Стоит это пояснить. Что значит это утверждение? Фактически, оно означает то, что амплитуды в разных каналах являются ветками одной и той же аналитической функции и могут быть получены друг из друга аналитическим продолжением. С учетом поляризации дело обстоит несколько сложнее, однако, можно сформулировать правила замены для среднего квадрата матричного элемента. Поскольку эта величина является функцией только импульсов внешних частиц, а точнее, скалярных произведений из них построенных, чтобы перейти в кросс канал, в котором частица в начальном состоянии заменена на свою античастицу в конечном состоянии, или наоборот, нужно просто подставить вместо импульса частицы p_p импульс античастицы с противоположным знаком, $-p_{\bar{p}}$. Если кросс канал получен переносом нечетного числа фермионов из начального состояния в конечное, то необходимо еще приписать дополнительный минус. Что касается самого матричного элемента (не квадрата), то аналогичное правило работает для инвариантных амплитуд.

6.1 Инвариантные амплитуды

Амплитуда M_{fi} , как видно, например, по правилам Фейнмана, является скаляром. Кроме того, она должна быть однородно линейна по волновым функциям начальных частиц и антилинейна по волновым функциям конечных (напомним, что v соответствует сопряжению от волновой функции позитрона). Кинематические переменные, т.е. импульсы частиц, входят в амплитуду так, чтобы она была инвариантом. Это означает, что тензор, построенный из векторов поляризации, должен сворачиваться с импульсами и затем умножаться на некоторую функцию инвариантов. Поскольку из векторов поляризации можно построить конечное число тензоров, мы всегда можем параметризовать амплитуду конечным набором функций от инвариантов, которые и называются инвариантными амплитудами. При этом, конечно, мы имеем в виду линейно независимые (с учетом уравнений движения) структуры. Из нашего определения видно, что инвариантные амплитуды определены неоднозначно, но это, конечно, не является проблемой.

Поясним понятие инвариантной амплитуды на примере рассеяния скалярной и спинорной частицы одинаковой массы. Обозначим импульсы начальной и конечной скалярной частицы как q, q' . Пусть в процессе сохраняется P -четность. Сначала посчитаем количество независимых спиральных амплитуд. Всего есть 4 амплитуды: $M_{++}, M_{+-}, M_{-+}, M_{--}$. Очевидно, что P -четность приводит к равенству (с точностью до фазы)

$$M_{++} = M_{--}, \quad M_{+-} = M_{-+}. \quad (42)$$

Значит, мы ожидаем, что есть две инвариантные амплитуды. Две независимые структуры можно выбрать в виде $t_1 = \bar{u}'u, t_2 = \frac{1}{2m}\bar{u}'(\hat{q} + \hat{q}')u$, так что

$$M = M_1 \bar{u}'u + M_2 \frac{1}{2m} \bar{u}'(\hat{q} + \hat{q}')u. \quad (43)$$

Остальные структуры, сохраняющие четность, выражаются через указанные две, например

$$\begin{aligned}\bar{u}'\hat{p}u &= \bar{u}'(\hat{p} - m + m)u = mt_1 \\ \bar{u}'\hat{q}u &= \frac{1}{2}\bar{u}'(\hat{q} + \hat{q}' + \hat{q} - \hat{q}')u = mt_2 + \bar{u}'(\hat{q} - \hat{q}')u = mt_2 + \bar{u}'(\hat{p}' - \hat{p})u = mt_2 \\ \bar{u}'\hat{p}\hat{q}u &= 2(pq)t_1 - \bar{u}'\hat{q}\hat{p}u = 2(pq)t_1 - m\bar{u}'\hat{q}u = 2(pq)t_1 - m^2t_2\end{aligned}$$

и т.д.

Кстати, мы можем считать инвариантами амплитудами сами M_{++} и M_{+-} в с.ц.и. Единственное неудобство только в том, что соответствующие тензоры, построенные из поляризаций, будут сложными.

Выполним все же это простое упражнение. Сначала выразим M_{++} и M_{+-} :

$$\begin{aligned}M &= M_1t_1 + M_2t_2 = (M_1 + M_2)\bar{u}'u + \frac{M_2}{m}\bar{u}'(\hat{q} - \hat{p})u \\ &= (M_1 + M_2)\bar{u}'u + 2\frac{|\mathbf{p}|}{m}\lambda M_2\bar{u}'\gamma^0\gamma^5u \\ &= (M_1 + M_2)(\varepsilon(1 - \lambda\lambda') + m(1 + \lambda\lambda'))\varphi'^\dagger\varphi + 2\frac{|\mathbf{p}|^2}{m}M_2(1 + \lambda\lambda')\varphi'^\dagger\varphi \\ M_{++} &= 2mc_{\theta/2}(M_1 + M_2) + 4\frac{|\mathbf{p}|^2}{m}M_2c_{\theta/2} \\ M_{+-} &= 2\varepsilon(M_1 + M_2)s_{\theta/2}\end{aligned}$$

Здесь $c_{\theta/2} = \cos(\theta/2)$, $s_{\theta/2} = \sin(\theta/2)$. Все величины в с.ц.и. выражаем через инварианты:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{p(p+q)}{\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s}}{2}, \\ |\mathbf{p}| &= \sqrt{\varepsilon^2 - m^2} = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m^2} = \frac{1}{2}\sqrt{-t - u} \\ s_{\theta/2} &= \sqrt{\frac{1 - c_{\theta}}{2}} = \frac{1}{2|\mathbf{p}|}\sqrt{-(p' - p)^2} = \sqrt{\frac{-t}{s - 4m^2}} \\ c_{\theta/2} &= \sqrt{\frac{1 + c_{\theta}}{2}} = \sqrt{\frac{-u}{s - 4m^2}}\end{aligned}$$

Теперь выражаем наоборот, $M_{1,2}$:

$$M_1 = -\frac{mM_{++}}{\sqrt{-u}(s - 4m^2)} + \frac{s - 2m^2}{\sqrt{-ts}(s - 4m^2)}M_{+-} \quad (44)$$

$$M_2 = \frac{mM_{++}}{\sqrt{-u}(s - 4m^2)} - \frac{2m^2}{\sqrt{-ts}(s - 4m^2)}M_{+-} \quad (45)$$

Подставляем

$$M = \left(-\frac{mM_{++}}{\sqrt{-u(s-4m^2)}} + \frac{s-2m^2}{\sqrt{-ts(s-4m^2)}}M_{+-} \right) t_1 + \left(\frac{mM_{++}}{\sqrt{-u(s-4m^2)}} - \frac{2m^2}{\sqrt{-ts(s-4m^2)}}M_{+-} \right) t_2 \quad (46)$$

$$= \frac{m(t_2 - t_1)}{\sqrt{-u(s-4m^2)}}M_{++} + \frac{(s-2m^2)t_1 - 2m^2t_2}{\sqrt{-ts(s-4m^2)}}M_{+-} \quad (47)$$

$$= M_{++} \frac{\bar{u}'[\hat{q} + \hat{q}' - 2m]u}{2\sqrt{-u(s-4m^2)}} + M_{+-} \frac{\bar{u}'[s - 2m^2 - m(\hat{q} + \hat{q}')]u}{\sqrt{-ts(s-4m^2)}} \quad (48)$$

Видим, что кроме громоздкости мы еще и получили лишние особенности (корни в знаменателях).

Более сложным процессом является электрон-электронное рассеяние. Всего $2^4 = 16$ спиральных амплитуд. P -четность уменьшает число амплитуд вдвое. Тождественность приводит к необходимости строить амплитуды с определенной симметрией по перестановке. Всего остается пять комбинаций. Используя соотношения Фирца мы всегда можем записать инвариантные амплитуды в виде $\bar{u}'_1 \dots u_1 \bar{u}'_2 \dots u_2$.

$$M = M_1 \bar{u}'_1 u_1 \bar{u}'_2 u_2 + M_2 \bar{u}'_1 \gamma^\mu u_1 \bar{u}'_2 \gamma_\mu u_2 + M_3 \bar{u}'_1 \sigma^{\mu\nu} u_1 \bar{u}'_2 \sigma_{\mu\nu} u_2 + M_4 \bar{u}'_1 \gamma_5 \gamma^\mu u_1 \bar{u}'_2 \gamma_5 \gamma_\mu u_2 + M_5 \bar{u}'_1 \gamma_5 u_1 \bar{u}'_2 \gamma_5 u_2 \quad (49)$$

7 Конкретные процессы КЭД

7.1 Рассеяние электрона на ядре. Формфактор ядра

Рассмотрим процесс рассеяния электрона на ядре. Поскольку масса ядра много больше массы электрона, ядро можно считать просто источником внешнего поля. При этом для тяжелых ядер существенным эффектом является неточечность. Потенциал, создаваемый неточечным ядром с плотностью заряда $\rho(\mathbf{r})$ записывается так

$$A^0(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Плотность заряда нормирована, конечно, на полный заряд ядра $Z|e|$:

$$\int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') = Z|e|.$$

Поскольку в диаграммной технике нам нужен фурье-образ потенциала, определим электрический форм-фактор ядра $F(\mathbf{q})$ так, что:

$$\tilde{A}^0(\mathbf{q}) = \frac{Z|e|}{\mathbf{q}^2} F(\mathbf{q})$$

Отсюда получаем, что

$$F(\mathbf{q}) = \frac{\int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r})}{\int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})} = \frac{1}{Z|e|} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}),$$

то есть, формфактор ядра является фурье-образом нормированного на единицу распределения зарядовой плотности. Если ядро сферическое, то, конечно, мы можем его считать функцией \mathbf{q}^2 . Формфактор, фактически, является измеримой величиной, так как борновское сечение пропорционально его квадрату. Через формфактор, в частности, определяется электрический зарядовый радиус r_e . Действительно, по определению

$$r_e^2 = \langle r^2 \rangle = \frac{\int d\mathbf{r} \mathbf{r}^2 \rho(\mathbf{r})}{\int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})} = -\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} F(\mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}=0} = -6F'(q^2 = 0)$$

Другими словами, при маленьких q формфактор имеет следующий вид:

$$F(q^2) = 1 - \frac{1}{6} r_e^2 q^2$$

7.2 Рассеяние электрона на мюоне, π -мезоне, протоне

$e - \mu$ рассеяние Взаимодействие мюона с электромагнитным полем устроено аналогично взаимодействию электрона. Среди характерных особенностей — расходимость на малых углах и предел внешнего поля при массе мюона стремящейся к бесконечности. Вычисление сечения описано в ?? .

$e - \pi$ рассеяние π -мезон отличается от мюона и электрона во-первых, тем, что он имеет нулевой спин, а во-вторых, тем, что при больших передачах импульса его нельзя считать точечной частицей. Для точечной скалярной частицы лагранжиан естественно получить удлинением производной, что приводит к вершине

$$-i j^\mu = -ie(p + p')^\mu \quad (50)$$

Поскольку π -мезон неточечный, общий вид тока такой:

$$\begin{aligned} -i j^\mu &= -ieF(q^2)(p + p')^\mu, \\ q &= p' - p, \end{aligned}$$

Конечно, при вычислении радиационных поправок мы, вообще говоря, не можем пользоваться этим выражением в качестве вершины (в частности, использование такой вершины может привести к отсутствию калибровочной инвариантности).

$e - p$ рассеяние. Формула Розенблюта Рассеяние электрона на протоне отличается от $e - \mu$ рассеяния тем, что протон не является точечной частицей, поэтому существенно включение формфакторов. Протон имеет спин 1/2 и ток, в отличие от случая $e - \pi$ рассеяния зависит от двух формфакторов, которые можно выбрать, например, так

$$j^\mu = \bar{u}(p') \left[f(q^2) \gamma^\mu - \frac{g(q^2)}{2m_p} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p). \quad (51)$$

Вычисление сечения и обсуждение поляризованного случая см. в ?? .

Для определения физического смысла введенных формфакторов, рассмотрим рассеяние (в борновском приближении) протона в постоянном электромагнитном поле. Считаем, что электромагнитный потенциал спадает на бесконечности и поэтому при рассеянии меняется только направление импульса. Для отличного от нуля угла рассеяния в лабораторной системе существует система, в которой рассеяние происходит в направлении назад. Эта система называется брейтовской. Вычислим в брейтовской системе нулевую и пространственные компоненты тока. Для этого удобно пользоваться тем, что $\bar{u}(p') = u'(p)$, где $u'(p)$ обозначает 4-спинор, соответствующий импульсу p , а штрих показывает, что его поляризация отлична от $u(p)$. Получаем

$$\begin{aligned} j^0 &= u^\dagger(p') \left[f + \frac{g}{2m_p} (\mathbf{q}\boldsymbol{\gamma}) \right] u(p) \\ &= \bar{u}'(p) \left[f + \frac{g}{2m_p} (\mathbf{q}\boldsymbol{\gamma}) \right] u(p) = \bar{u}'(p) \left[f + \frac{g}{2m_p} (\mathbf{q}\mathbf{p}) \right] u(p) = \left[f - \frac{g\mathbf{q}^2}{4m_p^2} \right] \bar{u}'(p)u(p) \\ j^0 &= \left[f + \frac{q^2}{4m_p^2} g \right] \bar{u}(p') \gamma^0 u(p) = G_E \bar{u}(p') \gamma^0 u(p) \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \bar{u}(p') \left[f\gamma - \frac{g}{4m_p} (\gamma\hat{q} - \hat{q}\gamma) \right] u(p) \\ &= \bar{u}(p') \left[f\gamma - \frac{g}{4m_p} (\gamma(\hat{p}' - m_p) - (m_p - \hat{p})\gamma) \right] u(p) = \bar{u}(p') \left[f\gamma - \frac{g}{4m_p} (2(\mathbf{p} + \mathbf{p}') - 4m_p\gamma) \right] u(p) \\ \mathbf{j} &= (f + g) \bar{u}(p')\gamma u(p) = G_M \bar{u}(p')\gamma u(p). \end{aligned}$$

Таким образом, формфакторы

$$\begin{aligned} G_E &= f + \frac{q^2}{4m_p^2} g, \\ G_M &= f + g \end{aligned}$$

характеризуют в брейтовской системе взаимодействие с электрическим и магнитным полем.

7.3 Аннигиляция электронов в пару мюонов, π -мезонов

Квадраты матричных элементов этих процессов могут быть получены с помощью перехода в кросс-канал из соответствующих процессов рассеяния. Дифференциальные и полные сечения см. в ?? . Угловую зависимость дифференциальных сечений в ультррелятивизме легко определить из элементарных соображений. Например, для аннигиляции в пару пионов, промежуточное состояние (фотон) имеет $j = 1, j^z = \pm 1$. Последнее является следствием сохранения спиральности в аннигиляции. Поэтому волновая функция пионов имеет угловую зависимость $Y_{1,\pm 1}(\mathbf{n}')$. Поскольку, например из P -четности следует, что вероятности проекций ± 1 совпадают, получаем для неполяризованного случая:

$$\overline{\sum} |M(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)|^2 \propto |Y_{1,+1}(\mathbf{n}')|^2 + |Y_{1,-1}(\mathbf{n}')|^2 \propto \sin^2 \theta \quad (52)$$

Для аннигиляции в мюоны рассуждаем так: В ультррелятивизме мюоны могут родиться только в состоянии с противоположной спиральностью. Поэтому, например, вероятность из фотона с $j^z = +1$ родиться мюонной паре с проекцией спина $+1$ на направление $\mathbf{n}' = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ равна

$$\left| \int d\mathbf{n} Y_{1,\pm 1, \mathbf{n}'}^*(\mathbf{n}) Y_{1,1, \mathbf{e}^z}(\mathbf{n}) \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta, \pm i, -\sin \theta)^* \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{4} (\cos \theta \pm 1)^2 \quad (53)$$

Чтобы получить полную вероятность, нужно просуммировать по всем возможностям:

$$\overline{\sum} |M(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \propto 1 + \cos^2 \theta \quad (54)$$

7.4 Комптоновское рассеяние, двухфотонная аннигиляция

Дифференциальные и полные сечения см. в ?? .

Характерная особенность комптоновского рассеяния — пик в направлении назад при высоких энергиях в с.д.и. Эта особенность в дифференциальном сечении связана с диаграммой с обменом электроном в u -канале (см следующую секцию). Двухфотонная аннигиляция является кросс-каналом. В соответствии с утверждениями следующей секции высокоэнергетические асимптотики сечений обоих процессов имеют вид

$$\sigma \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{const}{s} \log(s/m^2) \quad (55)$$

8 Асимптотика сечений при высоких энергиях.

Прежде всего, необходимо заметить, что существует достаточно общее ограничение на поведение сечений при высоких энергиях. Это ограничение носит название теоремы Фруассара². Эта теорема утверждает, что *полное сечение не может расти быстрее чем квадрат логарифма энергии*. Здесь мы это утверждение доказывать не будем. Покажем, что для реакций, в которых происходит одночастичный обмен в t -канале можно определить поведение амплитуд в реджевском пределе

$$s \gg t \gg m^2.$$

В этом неравенстве m^2 означает максимальную массу участвующих частиц (в том числе и виртуальной частицы).

8.1 Реджевский предел

Идея получения ограничения в том, чтобы воспользоваться перекрестной инвариантностью и парциальным разложением в t -канале. Рассмотрим для простоты случай реакции $1+2 \xrightarrow{j} 3+4$, причем все частицы будем считать бесспиновыми. Подпись j над стрелкой означает, что в t -канале есть одночастичное состояние со спином j (очевидно, j должен быть целым). В t -канале этот процесс описывается “аннигиляционной” диаграммой. Поскольку в промежуточном состоянии есть одна частица со спином j , парциальное разложение амплитуды включает лишь один член (с угловым моментом равным j):

$$M = A(t) P_j(\cos \theta)$$

Теперь выразим $\cos \theta$ через t и s . Конечно, удобно это делать сразу пренебрегая массами частиц.

$$s = -2p_1 p_3 = -\frac{t}{2} + \frac{t}{2} \cos \theta,$$

$$\cos \theta = 1 + \frac{2s}{t}$$

Имеем

$$M = A(t) P_j \left(1 + \frac{2s}{t} \right)$$

Согласно перекрестной инвариантности, амплитуда процесса в s -канале дается тем же выражением. Теперь используем то, что при $s \gg t$ основной вклад дает максимальная степень в полиноме (равная j) и что амплитуда безразмерна. Получаем

$$M \xrightarrow{s \gg t \gg m^2} const \times \left(\frac{s}{t} \right)^j \quad (56)$$

Эта формула годится и в общем случае, т.е. для начальных и конечных частиц с произвольным спином и обмена в t -канале частицей со спином j , целым или полуцелым. Бывают конечно случаи, когда для определенной поляризации начальных и/или конечных частиц по “случайным” причинам коэффициент при этой главной асимптотике оказывается равным нулю и тогда работают меньшие члены, например, содержащие массу в числителе. Другими словами, асимптотика (56) имеет смысл, когда амплитуда не зануляется в безмассовом пределе (в частности, константы взаимодействия в вершинах должны быть безразмерными).

Используя (56), можно предсказать поведение дифференциального и полного (если оно конечно) сечений. Из (24) получаем

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto \frac{1}{s^2} \left(\frac{s}{t} \right)^{2j}$$

²см. файл Froissart.pdf??

Для обмена частицей со спином $j = 1$ получаем, что при $s \gg t \gg m$ сечение ведет себя как $\frac{d\sigma}{dt} \propto t^{-2}$, и поэтому интеграл по t в основном набирается в области $t \sim m^2$, значит при больших s мы ожидаем

$$\sigma_{j=1}(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \text{const}$$

Аналогичный анализ случая $j = 1/2$ показывает, что

$$\sigma_{j=1/2}(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{\text{const}}{s} \log(s/m^2)$$

Если процесс описывается аннигиляционной или контактной диаграммой, существует предел амплитуды при $t \rightarrow 0$ и полное сечение набирается в области $t \sim s$. Для этого случая получаем

$$\sigma_{\text{ann}}(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{\text{const}}{s}$$