Глава 6

Многокритериальное принятие решений

> Принять решение - значит смириться с перевесом одних внешних факторов над другими.
>
> *Александр Твардовский*

6.1. Постановка задачи

Одним из элементов задачи принятия решений является критерий, в соответствие с которым ЛПР выбирает ту или иную альтернативу из множества возможных альтернатив. В общем случае критерий может представляться в виде некоторой оценочной функции C, принимающей значения на некотором множестве оценок O, или в виде правила, по которому выбирается "наилучшая" альтернатива. При этом "наилучшая" альтернатива соответствует максимальному или минимальному значению оценочной функции в зависимости от смысла критерия[1]. Если $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$ – множество альтернатив или решений, то $C : \mathcal{A} \to O$.

Для двух альтернатив a_i и a_k можно задать отношение строгого предпочтения, обозначаемое $a_i \succ_{\mathcal{A}} a_k$ и означающее, что из двух альтернатив a_i и a_k ЛПР отдает предпочтение альтернативе a_i. Обычно если задана оценочная функция C, то от-

[1] В дальнейшем будем предполагать, что "наилучшая" альтернатива соответствует максимальному значению оценочной функции. Если это условие не выполняется, то можно всегда заменить оценочную функцию таким образом, чтобы условие выполнялось.

ношение предпочтения $a_i \succ_{\mathcal{A}} a_k$ порождает отношение предпочтения $C(a_i) \succ_{\mathcal{C}} C(a_k)$, где $\mathcal{C}$ – множество возможных значений критерия C. Далее будем предполагать, что для любого множества O можно найти соответствие на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Тогда отношение предпочтения $C(a_i) \succ_{\mathcal{C}} C(a_k)$ эквивалентно условию $C(a_i) \geq C(a_k)$.

Необходимо отметить, что для одних и тех же понятий функция C может принимать различное множество значений. Пусть C – стоимость товара a. Тогда множество O значений функции C может состоять из элементов: большая, средняя, малая. Множество значений O может также содержать действительные числа, например 10, 20, 30, 40. Пусть имеется два товара a_1 и a_2. Если известно, что стоимость товара a_1 малая, а стоимость товара a_2 большая, то ЛПР отдаст предпочтение товару a_1, так как в этом случае выполняется отношение $C(a_1) \succ_{\mathcal{C}} C(a_2)$.

В большинстве практических задач принятия решения альтернативы оцениваются не по одному, а по нескольким критериям. Так, при экономической оценке проекта критериями служат экономическая эффективность, стоимость, реализуемость. При покупке оборудования мы опять сталкиваемся с несколькими критериями: стоимость, надежность, производительность и т.д. Достаточно сложно назвать практическую область, принятие решений в рамках которой ограничивалось бы только одним критерием. Наличие нескольких критериев делает задачу принятия решений *многокритериальной*. В многокритериальной задаче имеется множество из $m > 1$ критериев $C_1, ..., C_m$, таких что $C_i : \mathcal{A} \to O_i$. Здесь O_i – множество значений функции C_i. Иногда удобно рассматривать несколько критериев в виде одного *векторного критерия или векторной оценки* $C(a) = (C_1(a), ..., C_m(a))$ альтернативы $a \in \mathcal{A}$.

Таким образом задача многокритериального принятия решений определяется множеством возможных решений $\mathcal{A}$, векторным критерием C и отношениями предпочтений на множестве $\mathcal{A}$. Цель решения задачи - это поиск "оптимальной" в некотором смысле альтернативы $a^* \in \mathcal{A}$ или группы альтернатив с учетом отношений предпочтения на основе векторного критерия C, который определяется ЛПР.

Поиск решения многокритериальной задачи не представляет особых сложностей, если предпочтение по одному критерию влечет за собой такое же предпочтение по другому критерию, т.е. критерии кооперируются. Например, такая ситуация имеет место, когда при покупке автомобиля мы преследуем цель купить престижный и красивый автомобиль. Очень часто эти два критерия совпадают и престижный автомобиль является одновременно красивым.

Решение многокритериальной задачи также не представляет особых сложностей, если критерии нейтральны по отношению друг к другу, т.е. поиск решения по одному критерию никаким образом не отражается на поиске решения по другому критерию. Например, это имеет место, когда при покупке автомобиля мы преследуем цель купить надежный и красивый автомобиль.

Однако приведенные примеры являются частными случаями. В общем сложность решения многокритериальных задач состоит в том, что критерии конкурируют друг с другом. В большинстве практических задач поиск более предпочтительного решения по одному критерию приводит к тому, что решение становится менее предпочтительным по другому критерию, т.е. решения несравнимыми между собой. Например, рассматривая стоимость и престижность в качестве критериев при покупке автомобиля, можно утверждать, что более дешевый (более предпочтительный по первому критерию) автомобиль является менее престижным (менее предпочтительным по второму критерию). Анализ таких ситуаций может быть осуществлен при помощи определения множества Парето.

6.2. Множество Парето

Предположим, что при оценке альтернатив использовались два критерия: стоимость (C_1) и надежность (C_2). Значения критериев для различных альтернатив представлены в табл.

Таблица 6.1. Оценка трех альтернатив по двум критериям

Альтернативы	Критерий	
	Стоимость	Надежность
1	Малая	Низкая
2	Большая	Высокая
3	Малая	Высокая

6.1. Здесь $O_1 = \{$Малая,Большая$\}$ и $O_2 = \{$Низкая,Высокая$\}$, $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$.

Очевидно, что альтернатива 3 является наиболее предпочтительной, так как она не хуже остальных альтернатив по всем критериям.

Альтернатива a_i является *доминирующей* по отношению к альтернативе a_k, если по всем критериям оценки альтернативы a_i не хуже, чем альтернативы a_k, а хотя бы по одному критерию оценка a_i лучше. При этом альтернатива a_k называется *доминируемой*. Из определения следует, что альтернатива 3 из приведенного выше примера является доминирующей по отношению к альтернативе 1 и альтернативе 2. Это можно увидеть из рис. 6.1, где альтернатива 3 занимает самое правое и верхнее положение по отношению к другим альтернативам.

Рассмотрим теперь альтернативы 1 и 2. Из рис. 6.1 также следует, что альтернативы 1 и 2 не находятся в отношении доминирования. Действительно, по стоимости предпочтительнее альтернатива 1, а по надежности – альтернатива 2. Эти альтернативы являются *несравнимыми* по отношению предпочтения между векторными оценками, так как их невозможно сравнить непосредственно на основе критериальных оценок.

Альтернатива a_i, для которой не существует другой альтернативы a_k, лучшей по всем критериям одновременно, т.е. каждая из них превосходит любую другую по какому-то из критериев, называется *недоминируемой*, или *оптимальной по Парето*. Множество всех таких альтернатив называется *множеством Парето*. Если вернуться к примеру, то оставшиеся альтернативы 1 и 2 принадлежат множеству Парето.

Более строго можно сказать, что решение $a^* \in \mathcal{A}$ называ-

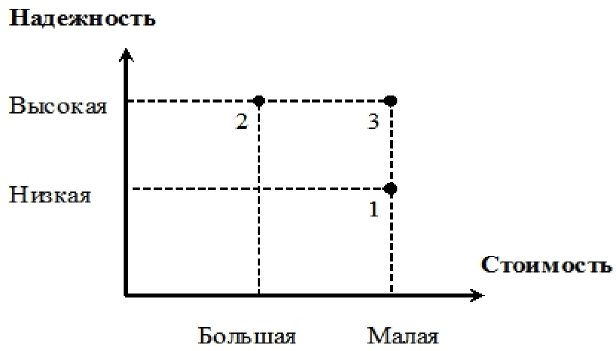

Рис. 6.1. Альтернативы и их положение в соответствии с критериями

ется оптимальным по Парето, или *эффективным*, или *парето-оптимальным*, если не существует такого возможного решения $a \in \mathcal{A}$, для которого имеет место неравенство $C(a) \geq C(a^*)$. Все парето-оптимальные решения образуют множество Парето, обозначаемое $\mathrm{Pa}_C(\mathcal{A})$. Одновременно множество векторов критериев $C(a)$, таких что $a \in \mathrm{Pa}_C(\mathcal{A})$ называется множеством *парето-оптимальных векторов критериев*, или *парето-оптимальных оценок*, и обозначается $\mathrm{Pa}(\mathcal{C})$. Следует отметить, что для множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ выполняются условия $\mathrm{Pa}_C(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ и $\mathrm{Pa}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$.

Принцип Парето заключается в том, что оптимальный исход следует искать только среди элементов множества недоминируемых решений $\mathrm{Pa}_C(\mathcal{A})$. Однако это условие справедливо, если выполняется *аксиома Парето*, устанавливающая "рациональное" поведений ЛПР, т.е. его стремление получить по возможности большие значения всех компонент векторного критерия C. Согласно аксиоме Парето, для всех пар допустимых решений $a_i, a_k \in \mathcal{A}$, для которых имеет место неравенство $C(a_i) \geq C(a_k)$, выполняется соотношение $a_i \succ_{\mathcal{A}} a_k$.

Из рис. 6.2 видно, что любая точка, удовлетворяющая условию $C(a) \geq C(a^*)$, попадает в угол с вершиной в точке $C(a^*)$

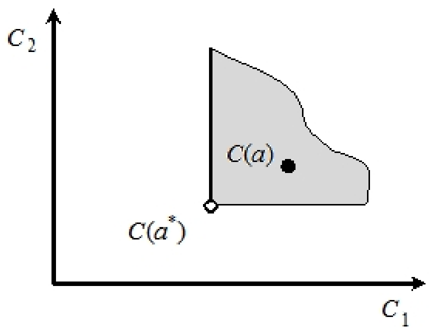

Рис. 6.2. Множество точек $C(a)$, для которых $C(a) \geq C(a^*)$

и сторонами, параллельными координатным осям. Решение a^* является оптимальным по Парето, если не существует решения $a \in \mathcal{A}$, такого что точка $C(a)$ лежала бы в рамках этого угла при условии, что точка $C(a^*)$ не принадлежит углу.

Множество Парето также называют *множеством неулучшаемых решений*. Парето-оптималъность решения a^* означает, что оно не может быть улучшено ни по одному из критериев без ухудшения по какому-нибудь другому критерию. Так, в примере с оставшимися двумя альтернативами без дополнительной качественной или количественной информации нельзя выделить одну оптимальную альтернтативу. Поэтому при поиске одной наиболее предпочтительной альтернативы необходимы дополнительные сведения о критериях или предпочтениях, которые бы смогли уменьшить множество Парето.

Определим также слабо эффективные решения, которые представляют меньший интерес, чем эффективные решения. Альтернатива a' называется *слабо эффективным* решением, если оно не может быть улучшено сразу по всем m критериям. В этом случае не существует таких точек $a \in \mathcal{A}$, что $C_i(a) > C_i(a')$ для всех $i = 1, ..., m$. Множество слабо эффективных решений обозначается $\mathrm{W}_C(\mathcal{A})$. Из определения этого множества следует условие $\mathrm{Pa}_C(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{W}_C(\mathcal{A})$.

Таблица 6.2. Результаты оценивания кандидатов на должность

Кандидаты	Критерий	
	Образование	Опыт
1	1	3
2	2	2
3	2	1
4	1	2
5	3	1

Пример 6.1. Рассмотрим пример оценки кандидатов на некоторую должность с использование трехбалльной системы $O_1 = O_2 = \{1, 2, 3\}$ по двум критериям: образование (C_1) и опыт работы (C_2). Результаты оценивания пяти кандидатов представлены в табл. 6.2.

Точки на плоскости на рис. 6.3 являются векторными оценками кандидатов. Из этого рисунка видно, что оптимальными по Парето являются кандидаты с номерами 1, 2, 5. Кандидаты с номерами 4 и 3 являются доминируемыми, так как угол с вершиной в точке 4 или 3, рассмотренный выше, содержит по две точки из множества недоминируемых точек 1, 2, 5. Аналогичные углы для точек 1, 2, 5 не содержат точек, соответствующих другим кандидатам. В то же время точки 4 и 3 являются слабо эффективными решениями задачи, так как не существует альтернатив, соответствующих точкам с координатами $(2, 3)$, $(3, 3)$ или $(3, 2)$.

Существует много методов сужения множества Парето, но все они основаны на привлечении дополнительной качественной или количественной информации о критериях. Если в примере 6.1 с оценкой кандидатов определить минимальный порог образования равным двум, то точка 1 исключается из множества Парето[2], которое теперь содержит только две точки 2 и 5. Если предположить в дополнение к введенному ограничению, что опыт работы существенно важнее, чем образование, то точка 5 исключается из множества Парето, которое сужается до одной точки, или кандидата, с номером 2. Из приведенного примера видно, что только привлечением дополнительной

[2]Здесь рассматриваются только оставшиеся точки (элементы) множества неулучшаемых решений 1, 2 и 5.

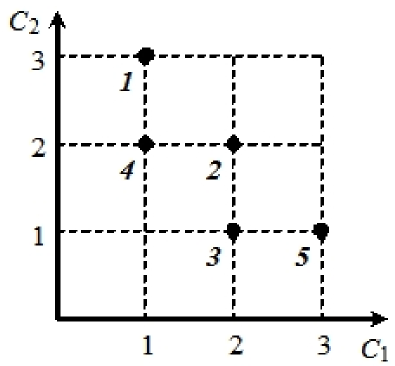

Рис. 6.3. Точки, соответствующие векторным оценкам пяти кандидатов на должность

информации можно сузить множество Парето.

Авторы книги [25] на практических примерах показывают, что сужение множества возможных альтернатив $\mathcal{A}$ до множества эффективных решений $\mathrm{Pa}_C(\mathcal{A})$ важно не только само по себе, но еще и потому, что на более узком подмножестве могут выполняться различного рода упрощающие дальнейший анализ допущения о предпочтениях, которые заведомо несправедливы для множества всех решений. Кроме того, эффективные решения могут обладать интересными и практически важными свойствами, не присущими остальным решениям.

Таким образом, решение многокритериальной задачи сводится к следующим основным составляющим:

1) определению множества неулучшаемых решений Парето;

2) получению дополнительной информации о критериях в том или ином виде;

3) использованию дополнительной информации о критериях для сужения множества Парето до тех пор пока это множество не будет содержать только одну альтернативу или группу альтернатив и “свертывание” критериев.

Большинство методов решения многокритериальных задач представляют собой либо вторую составляющую, либо третью составляющую, либо обе – вторую и третью составляющие. На самом деле, достаточно редко встречаются методы принятия решений, которые независимо определяются второй и третьей составляющей. Во многих случаях получение дополнительной информации зависит от ее дальнейшего использования. Отсюда строгое разделение составляющих представляет определенные трудности. Поэтому в дальнейшем при описании некоторых методов получения дополнительной информации мы будем забегать вперед и использовать один из возможных подходов ее использования. В основном это будет метод "свертывания" критериев, или получения обобщенного критерия $\mathbf{C}(a)$ как некоторой функции частных критериев $C_1(a), ..., C_m(a)$.

Если предположить, что информация о критериях получена в виде вектора их весов $W = (w_1, ..., w_m)$, так что более важному критерию приписывается больший вес, то одним из наиболее распространенных подходов к использованию полученной информации о критериях является *скаляризация*, или *свертка критериев* с учетом W, т.е. сведение многокритериальной задачи к однокритериальной задаче, целевая функция которой представляет собой некоторую весовую комбинацию исходных критериев. При этом наиболее часто используемые свертки – линейная, максиминная, мультипликативная.

6.3. Определение множества Парето

Получение множества Парето базируется на его определении. Если имеется конечное число альтернатив $a_1, ..., a_n$, то для получения множества Парето необходимо вектор $C(a_i)$ сравнить с другим вектором $C(a_k)$, т.е. определить справедливость неравенства $C(a_i) \geq C(a_k)$. Если это неравенство выполняется[3], то альтернатива a_k не может быть оптимальной по Парето.

[3]Сравнение векторов осуществляется по правилу: $C(a_i) \geq C(a_k)$, если $C_j(a_i) \geq C_j(a_k)$ для всех $j = 1, ..., m$.

Проанализировав аналогичным образом все возможные пары альтернатив и удалив все альтернативы, которые не являются парето-оптимальными, получим множество Парето.

Пример 6.2. Вернемся к примеру об оценке кандидатов на некоторую должность. Возьмем первую альтернативу 1 и последовательно сравним ее с оставшимися четырьмя альтернативами. Неравенство $C(1) \geq C(a_k)$ выполняется только для $k = 4$, т.е. для четвертой альтернативы. Следовательно, ее можно исключить из множества эффективных решений. Далее сравниваем вторую альтернативу с оставшимися тремя. Неравенство $C(2) \geq C(a_k)$ выполняется для $k = 3$ и третью альтернативу исключаем. Далее сравниваем оставшуюся пятую альтернативу с первой и второй альтернативой. Неравенство $C(5) \geq C(a_k)$ не выполняется для $k = 1, 2$. В итоге получаем множество Парето, состоящее из альтернатив $1, 2, 5$, что и было получено в результате анализа рис. 6.3.

В работе [20] предлагается формальный алгоритм определения множества Парето, основанный на рассмотренном выше подходе.

Построение множества Парето в задачах с бесконечным множеством возможных векторов является достаточно сложной задачей, для решения которой не существует универсального метода за редким исключением в некоторых частных случаях. Тем не менее существуют необходимые и достаточные условия отбора решений, которые являются парето-оптимальными. Эти условия будут рассмотрены ниже.

6.4. Способы получения и представления дополнительной информации о критериях

Множество Парето, полученное после исключения из $\mathcal{A}$ всех доминируемых решений, может содержать большое количество элементов. Поэтому для принятия решения необходимо сузить это множество на основе дополнительной информации о критериях. Это является второй составляющей решения многокритериальной задачи.

Необходимо отметить, что получение дополнительной информации о критериях можно рассматривать как снятие неопределенности о них. При этом до получения каких-либо данных о критериях, имеется полная неопределенность, которая соответствует максимальному размеру множества Парето. Получая новые сведения о критериях, мы снимаем эту неопределенность, что ведет к сужению множества эффективных решений.

Большинство возможных экспертных оценок о критериях может быть представлено в виде следующих пяти групп:

К1) нестрогое предпочтение: $C_i \geq C_j$;

К2) строгое предпочтение: $C_i - C_j \geq \alpha_i$;

К3) кратное предпочтение: $C_i \geq \alpha_i C_j$;

К4) интервальная форма: $\alpha_i \leq C_i \leq \alpha_i + \varepsilon_i$;

К5) предпочтение разностей: $C_i - C_j \geq C_k - C_l$, для всех $j \neq k \neq l$.

Здесь α_i и ε_i – неотрицательные числа.

Исходя из приведенной классификации оценок критериев, рассмотрим основные способы получения дополнительной информации. Ниже мы будем предполагать, что критерии являются однородными, т.е. у критериев должны быть общая шкала [24]. Для сравнения неоднородных критериев их необходимо привести к единой шкале или нормализовать.

Один из способов приведения критериев к общей шкале заключается в следующем. Предположим, что множество значений всех критериев имеет нижнюю границу $\inf C_i$ и верхнюю границу $\sup C_i$, $i = 1, ..., m$. Тогда для приведения всех критериев к единым нижней и верхней границам, скажем g и h, можно воспользоваться следующим достаточно простым выражением:

$$C'_i(a) = g + (h - g)\frac{C_i(a) - \inf C_i}{\sup C_i - \inf C_i}. \tag{6.1}$$

Новые критерии $C'_i(a)$ будут изменяться в пределах от g до h.

Однако необходимо отметить, что во многих прикладных задачах проблема выполнения условия однородности критериев далеко не всегда может быть решена так просто. В книге

[35] приведен пример, иллюстрирующий сказанное.

При выполнении условия однородности критериев каждому критерию можно приписать некоторый положительный вес $w_i \geq 0$, характеризующий относительную важность критерия. Совокупность весов для всех критериев образует вектор $W = (w_1, ..., w_m)$. Обычно веса выбираются таким образом, чтобы выполнялось условие $w_1 + ... + w_m = 1$.

6.4.1. Указание нижних границ критериев

В качестве дополнительной информации может выступать ограничение вида

$$C_i(a) \geq \gamma_i, \ i = 1, ..., m. \tag{6.2}$$

Число γ_i рассматривается здесь как нижняя граница по i-му критерию. Указание нижних границ критериев относится к оценкам четвертой группы К4 при условии, что $\alpha_i = \gamma_i$ и $\varepsilon_i \to \infty$. Результатом использования нижних границ критериев является сужение исходного множества Парето $\mathrm{Pa}_C^0(\mathcal{A})$ до нового множества[4] $\mathrm{Pa}_C^\Omega(\mathcal{A})$, которое состоит из точек, удовлетворяющих всем ограничениям (6.2). Если $\mathrm{Pa}_C^\Omega(\mathcal{A})$ оказывается пустым, то ЛПР должен уменьшить значения границ γ_i.

Достоинством данного подхода для сужения множества Парето является возможность корректировки границ в режиме диалога с экспертом или ЛПР, а также по мере поступления новой информации. Однако это достоинство имеет силу, когда число критериев мало. При возрастании числа критериев для ЛПР становится все сложнее оценить влияние на получаемые решения каждого из ограничений.

Пример 6.3. Вернемся к примеру об оценке кандидатов, предполагая, что уровень образования для работника должен быть не ниже 2, т.е. появляется дополнительная информация Ω, согласно которой

[4] Наличие информации Ω о критериях будет обозначаться соответствующим верхним индексом, а ее отсутствие – индексом 0. Аналогичные обозначения приняты в работе [24].

$C_1(a) \geq 2$. Тогда множество Парето, состоящее из трех кандидатов 1, 2, 5 ($\mathrm{Pa}_C^0(\mathcal{A}) = \{1, 2, 5\}$), сужается до двух кандидатов 2 и 5 ($\mathrm{Pa}_C^\Omega(\mathcal{A}) = \{2, 5\}$), так как у первого кандидата уровень образования равен 1.

Указание нижних границ критериев можно отнести к *стратегии исключения*, определенной Ногиным [20], которая состоит в исключении из списка имеющихся возможных вариантов тех альтернатив, которые заведомо не удовлетворяют по какому-то одному или же сразу по нескольким критериям одновременно.

6.4.2. Матрицы парных сравнений

Одним из наиболее популярных и распространенных методов определения весов критериев и оценок альтернатив является использование матриц парных сравнений. Пусть задано n элементов, или объектов, $a_1, ..., a_n$. Для каждого элемента определен некоторый вес w_i, $i = 1, ..., n$, и выполняется условие $w_1 + ... + w_m = 1$. Тогда можно построить матрицу V относительных весов

w_1/w_1	w_1/w_2	...	w_1/w_n
w_2/w_1	w_2/w_2	...	w_2/w_n
...	...	...	...
w_n/w_1	w_n/w_2	...	w_n/w_n

.

Каждый элемент $v_{ij} > 0$ матрицы относительных весов представляет собой отношение веса i-го объекта a_i к весу j-го объекта a_j, т.е. $v_{ij} = w_i/w_j$ для любых $i, j = 1, ..., n$. Элементы матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, являются обратными по отношению друг к другу, т.е. $v_{ij} = 1/v_{ji}$ для любых $i, j = 1, ..., n$.

Матрица V обладает свойством совместности в том смысле, что для всех номеров $i, j, k = 1, 2, ..., n$ имеют место равенства

$$v_{ij} \cdot v_{jk} = \frac{w_i}{w_j} \cdot \frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} = v_{ik}.$$

Кроме того, число n является собственным значением матрицы, а вектор столбец $W^{\mathrm{T}} = (w_1, ..., w_m)^{\mathrm{T}}$ – собственный вектор[5]. Отсюда выполняется равенство

$$V \cdot W^{\mathrm{T}} = nW^{\mathrm{T}}.$$

Матрица V имеет только два различных собственных значения 0 и n. Тогда, обозначив $\lambda_{\max} = \max\{0, n\} = n$, можно переписать последнее неравенство в виде

$$V \cdot W^{\mathrm{T}} = \lambda_{\max} W^{\mathrm{T}}. \tag{6.3}$$

Однако все приведенные соотношения имеют место только тогда, когда веса w_i, $i = 1, ..., n$, заданы заранее. В реальных задачах наоборот, требуется найти веса, которые представляют собой значимость объектов $a_1, ..., a_n$. В этом случае экспертами или ЛПР путем попарного сравнения объектов заполняется матрица V, в которой каждый элемент v_{ij} показывает во сколько раз вес объекта a_i больше веса объекта a_j. Полученная матрица называется *матрицей парных сравнений.*

При заполнении матрицы парных сравнений обычно эксперт определяет только $n(n-1)/2$ элементов матрицы. Это могут быть, например, элементы выше диагонали. Элементы ниже диагонали вычисляются из условия $v_{ij} = 1/v_{ji}$. Элементы, принадлежащие диагонали матрицы равны единице. Для того чтобы упростить процедуру получения экспертных оценок элементов матрицы парных сравнений, значения v_{ij} могут выбираться из фиксированной шкалы, например

$$\{1/9, 1/8, 1/7, ..., 1/2, 1, 2, 3, ..., 8, 9\}.$$

Числа шкалы можно интерпретировать следующим образом:

1 – равная важность;

3 – слабое превосходство;

5 – сильное превосходство;

7 – очень сильное превосходство;

[5]Здесь символ T означает транспонирование.

9 – абсолютное превосходство;

2, 4, 6, 8 – промежуточные случаи.

Значения $1/9, ..., 1/2$ получаются из свойства обратной симметричности матрицы V, т.е. $v_{ij} = 1/v_{ji}$.

Для вычисления вектора W необходимо найти собственные числа матрицы V, т.е. решить алгебраическое уравнение n-й степени

$$\det(V - \lambda_{\max} E) = 0.$$

Здесь E – единичная матрица размерности $n \times n$ (матрица, у которой все элементы равны 0 кроме диагонали, элементы которой равны 1); det – детерминант (определитель) матрицы. После вычисления λ вектор W определяется из системы уравнений (6.3). Далее вектор W нормализуется так, чтобы выполнялось условие $w_1 + ... + w_m = 1$.

Свойство совместности на практике, как правило, не выполняется. Поэтому матрица парных сравнений обычно отличается от "идеальной" матрицы относительных весов тем, что она не удовлетворяет свойству совместности. Кроме того, у матрицы парных сравнений максимальное собственное значение чаще всего больше n. Для оценки того, как матрица парных сравнений удовлетворяет свойству совместности, Саати [30] предложил использовать *индекс согласованности* (ИС), который определяется как

$$\text{ИС} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}.$$

Пример 6.4. Предположим, что в результате парных сравнений получена матрица

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det(V - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 4 \\ 1/3 & 1-\lambda & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \frac{1}{6}.$$

Значение $\lambda_{\max}$ находится как максимальный вещественный корень уравнения

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + \frac{1}{6} = 0.$$

Единственный вещественный корень – $\lambda = 3.018$. Индекс согласованности равен

$$\text{ИС} = (3.018 - 3)/(3 - 1) = 0.009.$$

Индекс не превышает порогового уровня 0.1. Система линейных уравнений для вычисления вектора W, построенная на основе матричного уравнения (6.3) имеет вид[6]:

$$\begin{cases} 1w_1^* + 3w_2^* + 4w_3^* = 3.018w_1^* \\ \frac{1}{3}w_1^* + 1w_2^* + 2w_3^* = 3.018w_2^* \\ \frac{1}{4}w_1^* + \frac{1}{2}w_2^* + 1w_3^* = 3.018w_3^* \end{cases}.$$

Система имеет множество решений, так как детерминант матрицы равен 0. Одно из ненулевых решений имеет вид $W = (4.579, 1.747, 1)$. Нормированный вектор – $w_1 = 0.625$, $w_2 = 0.2385$, $w_3 = 0.1365$.

Очевидно, что решение уравнения для вычисления $\lambda_{\max}$ и решение системы уравнений для вычисления вектора W может быть достаточно сложной задачей с вычислительной точки зрения. Поэтому Саати предложил приближенный метод вычисления W. В соответствии с этим методом веса вычисляются по формуле

$$w_i^* = (v_{i1} \cdot v_{i2} \cdots v_{in})^{1/n}, \; i = 1, ..., n.$$

Нормализация осуществляется при помощи выражения

$$w_i = \frac{w_i^*}{\sum_{j=1}^n w_j^*}.$$

Способ вычисления значения $\lambda_{\max}$ в этом случае представлен в разделе 7.3. Для окончательной проверки согласованности необходимо ИС разделить на значение средней согласованности (ИСР) для случайных матриц, которое для заданного n

[6] Веса w_i^*, отмеченные знаком “$*$”, являются ненормированными.

дано в табл. 7.1. Если отношение не превышает 20%, то можно считать, что экспертные суждения согласованны. Если оно превышает 20%, то необходимо корректировать анализируемую матрицу.

Пример 6.5. Вернемся к предыдущему примеру и найдем веса приближенным способом. Тогда

$$
\begin{aligned}
w_1^* &= (1 \cdot 3 \cdot 4)^{1/3} = 2.289,\\
w_2^* &= (1/3 \cdot 1 \cdot 2)^{1/3} = 0.874,\\
w_3^* &= (1/4 \cdot 1/2 \cdot 1)^{1/3} = 0.5.
\end{aligned}
$$

Выполнив нормализацию полученных выше весов, получаем нормированные веса $w_1 = 0.625$, $w_2 = 0.238$, $w_3 = 0.137$. Из результатов расчетов видно, что приближенный метод дает значения весов, достаточно близкие к тем, что получены точным методом.

6.4.3. Упрощенный метод построения матриц парных сравнений (схема сравнения с образцом)

Из описания процедуры заполнения матрицы парных сравнений видно, что необходимо сделать $n(n-1)/2$ сравнений. При этом полученная матрица может не удовлетворять свойству совместности. Ногин в работе [21] предложил упрощенный метод построения матриц парных сравнений, который основан на свойстве совместности.

Выделяется объект ("образец"), с которым эксперту удобнее всего сравнивать все остальные объекты. Этому объекту присваивают первый номер. Остальные объекты могут быть пронумерованы любым способом. Далее эксперту предлагают сравнить вес первого объекта с весом второго объекта и указать положительное число, показывающее во сколько раз вес первого объекта больше веса второго объекта. В результате выполнения такого сравнения эксперт назначает некоторое положительное число v_{12}. Далее для сравнения с первым объектом рассматривается третий объект и в результате сравнения экспертом указывается число v_{13}, и т.д. После выполнения сравнений первого объекта со всеми остальными будут назначены положительные числа $v_{12}, ..., v_{1n}$. Тем самым, с учетом равенства $v_{11} = 1$ будет известна вся первая строка матрицы V. Остальные элементы матрицы V можно найти на основе свойств симметричности и совместности. Благодаря этим свойствам имеют место равенства

$$v_{ij} = v_{i1} \cdot v_{1j} = \frac{v_{1j}}{v_{1i}}, \ i, j = 2, ..., n. \tag{6.4}$$

С помощью этих равенств вычисляются элементы остальных строк матрицы V.

После того как матрица V построена указанным способом, можно найти весовой вектор $W = (w_1, ..., w_m)$. Его компоненты вычисляются по формуле

$$w_i^* = \frac{v_{1n}}{v_{1i}}, \ i = 1, 2, ..., n-1, \ w_n^* = 1.$$

Полученный вектор весов $(w_1^*, ..., w_n^*)$ не удовлетворяет требованию нормировки, так как его последняя компонента равна единице. Для того чтобы он был нормирован, каждую его компоненту следует разделить на сумму всех компонент, т.е. на величину $w_1^* + ... + w_{n-1}^* + 1$.

Обоснование выбора компонент вектора весов можно найти в работе [21].

Пример 6.6. Предположим, что необходимо сравнить трех кандидатов по критерию "опыт". В результате сравнения первого кандидата со всеми остальными, от эксперта были получены следующие данные: $v_{12} = 4$, $v_{13} = 1/3$. Здесь $v_{12} = 4$ означает, что опыт работы второго кандидата меньше в четыре раза, а значение $v_{13} = 1/3$ означает, что опыт работы третьего кандидата в три раза больше первого, В соответствии с формулой (6.4) получаем значение элемента $v_{23} = v_{21} \cdot v_{13} = 4/3$. Далее, используя свойство симметричности, получаем все остальные элементы матрицы парных сравнений

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1/3 \\ 1/4 & 1 & 4/3 \\ 3 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.4.4. Упрощенный метод построения матриц парных сравнений (схема последовательного сравнения объектов)

Другой метод построения матриц парных сравнений, предложенный Ногиным, реализует схему последовательного сравнения. Рассмотрим набор элементов $v_{12}, v_{23}, ..., v_{n-1,n}$. Этому набору соответствует следующая схема последовательного сравнения. Из имеющегося набора объектов произвольно выбирается какой-то один. Ему присваивается первый номер. Для него с целью последующего сравнения подбирается другой объект (которому присваивается второй номер), наиболее "подходящий" для сравнения с первым. В результате сравнения становится известен элемент v_{12}. Дальнейшие действия аналогичны: для второго объекта подбирается наиболее "удобный" для сравнения третий объект; в результате сравнения становится известен элемент v_{23} и т.д.

Формула для последовательного вычисления всех остальных элементов матрицы V, расположенных выше главной диагонали, на основе набора $v_{12}, v_{23}, ..., v_{n-1,n}$ имеет вид

$$v_{ij} = v_{i,j-1} \cdot v_{j-1,j}, \; i = 1, ..., n-2, \; i < j-1.$$

Согласно этой формуле сначала можно найти все элементы первой строки в порядке возрастания номера столбца, затем аналогично – все элементы второй строки, начиная с v_{24}, и т.д. до последнего элемента $v_{n-2,n}$. Последний столбец построенной матрицы будет являться искомым (ненормированным) весовым вектором. Компоненты (ненормированного) весового вектора могут быть также вычислены на основе набора элементов $v_{12}, v_{23}, ..., v_{n-1,n}$ по формуле

$$\begin{aligned} w_k^* &= v_{k,k+1} \cdot v_{k+1,k+2} \cdot ... \cdot v_{n-1,n}, \\ k &= 1, ..., n-1, \\ w_n^* &= 1. \end{aligned}$$

6.5. Методы свертки критериев

6.5.1. Метод главного критерия

В методе главного критерия выбирается один из критериев, например C_i, который наиболее полно отражает цель принятия решений. Остальные критерии учитываются только с точки зрения возможного указания их нижних границ $C_j(a) \geq \gamma_j$, $j \neq i$. Таким образом, исходная задача многокритериального принятия решений заменяется однокритериальной задачей с критерием C_i, т.е.

$$a^* = \arg\max_{a \in \mathcal{A}} C_i(a), \tag{6.5}$$

при ограничениях $C_k(a) \geq \gamma_k$, $k \neq i$.

При этом такая замена существенно облегчает решение задачи, но не является эквивалентной. Решение $a^* \in \mathcal{A}$ является наилучшим, если для всех $a \in \mathcal{A}$ выполняется условие $C_i(a^*) \geq C_i(a)$, где i – номер главного критерия. Этот метод по сути аналогичен методу с использованием критерия наиболее вероятного состояния природы в однокритериальных задачах принятия решений в условиях риска.

Пример 6.7. Вернемся к примеру оценки кандидатов, предполагая, что второй критерий C_2 является "главным". Тогда оптимальным будет первый кандидат, так как значение $C_i(1) = 3$ больше всех остальных значений второго компонента векторного критерия.

Задача была решена без учета ограничений на другие критерии. Так, при использовании ограничения $C_1(a) \geq 2$, или $\gamma_1 = 2$, полученное решение не удовлетворяет введенному ограничению. В этом случае максимум C_2 достигается для альтернатив 2 и 4, т.е. $C_2(2) = C_2(4) = 2$. Однако четвертая альтернатива не удовлетворяет введенное ограничение, так как $C_1(4) \geq 1$. Поэтому оптимальной является вторая альтернатива.

В работе [35] доказано, что в качестве главного критерия может быть выбран любой из частных критериев. Независимо от этого выбора произвольное эффективное решение может быть получено как решение задачи (6.5) при соответствующих границах γ_k.

Несмотря на отмеченные свойства, применять метод целесообразно, когда имеется только один главный критерий, существенно отличающийся от всех остальных критериев. Если это условие не выполняется, то применение метода трудно обосновать.

6.5.2. Линейная (аддитивная) свертка

Самый простой и распространенный способ комбинирования исходных критериев основан на использовании так называемой линейной свертки критериев, которая имеет вид

$$\mathbf{C}(a) = \sum_{i=1}^{m} w_i C_i(a). \tag{6.6}$$

Здесь $w_1 + ... + w_m = 1$. Решение $a^* \in \mathcal{A}$ является наилучшим, если для всех $a \in \mathcal{A}$ выполняется условие $\mathbf{C}(a^*) \geq \mathbf{C}(a)$, или

$$a^* = \arg\max_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{C}(a) = \arg\max_{a \in \mathcal{A}} \sum_{i=1}^{m} w_i C_i(a).$$

Пример 6.8. Вернемся к примеру оценки кандидатов на некоторую должность, предполагая, что $w_1 = 0.4$ и $w_2 = 0.6$. Используя табл. 6.2, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(1) &= w_1 C_1(1) + w_2 C_2(1) = \\ &= 0.4 \cdot 1 + 0.6 \cdot 3 = 2.2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(2) &= w_1 C_1(2) + w_2 C_2(2) = \\ &= 0.4 \cdot 2 + 0.6 \cdot 2 = 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(5) &= w_1 C_1(5) + w_2 C_2(5) = \\ &= 0.4 \cdot 3 + 0.6 \cdot 1 = 1.8.\end{aligned}$$

Отсюда можно заключить, что первый кандидат является наилучшим, так как $\mathbf{C}(1) > \mathbf{C}(2) > \mathbf{C}(5)$.

Если множество возможных решений $\mathcal{A}$ является бесконечным и подмножеством действительных чисел, т.е. $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$, а множество $\mathcal{C}$ является подмножеством $\mathbb{R}^n$, т.е. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$, то *достаточное условие парето-оптимальности* заключается в следующем. Пусть $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ – произвольное множество векторных оценок. Если векторная оценка $\mathbf{C}(a^*)$ доставляет максимум функции (6.6) при $w_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$, то веторная оценка $\mathbf{C}(a^*)$ является парето-оптимальной на множестве $\mathcal{D}$.

Необходимое условие парето-оптимальности можно записать следующим образом. Пусть $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ – выпуклое множество, $\mathbf{C}(a^*) \in \mathcal{D}$ – парето-оптимальная векторная оценка на множестве $\mathcal{D}$. Тогда найдутся такие неотрицательные числа $w_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$, что функция (6.6) достигает максимума на множестве $\mathcal{D}$ в точке $\mathbf{C}(a^*)$. Доказательство и различная интерпретация приведенных условий может быть найдена в книгах Ногина [20], Подиновского и Ногина [25], Розена [29], Черноруцкого [35] и других авторов.

Из необходимого условия парето-отимальности следует, что главным ограничивающим фактором эффективности решения при использовании линейной свертки критериев является выпуклость множества $\mathcal{D}$. На самом деле, существует еще ряд ограничивающих факторов или условий, которые связаны с "рациональным" поведением ЛПР. Ногин в своих работах [21] и [19] показал, что при нарушении представленных выше условий применение линейной свертки рискованно или вообще недопустимо, так как в результате ее максимизации можно "пропустить" именно то решение, которое в данном случае следует выбрать. Другими словами, в этом случае существует наилучшее решение, которое невозможно получить в результате максимизации линейной свертки ни при каких неотрицательных коэффициентах w_i. В частности, если множество альтернатив и множество векторных оценок конечны, то они не являются выпуклыми. Поэтому применение линейной свертки может привести к результатам, противоречащим здравому смыслу.

Ногин [21] рассмотрел следующий пример, иллюстрирующий сказанное выше. Предположим, что задача состоит в выборе прямоугольного участка земли из трех вариантов 10×10, 5×20, 7×15. Очевидно, что третий участок с площадью 105 является более предпочтительным. Однако если критерии – длина и ширина участка, то ни при каких положительных весах w_1 и w_2 третий участок не будет выбран при использовании линейной свертки.

Линейная свертка основана на неявном постулате: "низкая оценка по одному критерию может быть компенсирована высокой оценкой по другому". Однако, этот постулат верен отнюдь не для всех моделей. Простейший пример – ухудшение качества изображения телевизора не может быть компенсировано качеством его звука.

Несмотря на отмеченные выше проблемы при использовании линейной свертки, большинство методов многокритериального принятия решений основаны именно на применении данного метода скаляризации. Причинами этого являются, прежде всего, простота и наглядность метода. Весовые коэффициенты могут рассматриваться как показатели относительной значимости каждого критерия. Чем большее значение придается некоторому критерию, тем больший вклад в (6.6) он должен давать и тем большее значение соответствующего веса должно быть выбрано.

6.5.3. Максиминная свертка

Более универсальной с точки зрения области применения является нелинейная свертка, которая имеет вид[7]

$$\mathbf{C}(a) = \min_{i=1,\dots,m} w_i C_i(a). \tag{6.7}$$

Решение $a^* \in \mathcal{A}$ является наилучшим, если для всех $a \in \mathcal{A}$ выполняется условие $\mathbf{C}(a^*) \geq \mathbf{C}(a)$, или

$$a^* = \arg\max_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{C}(a) = \arg\max_{a \in \mathcal{A}} \min_{i=1,\dots,m} w_i C_i(a).$$

[7]Максиминная свертка в литературе также называется сверткой Гермейера, так как она была предложена и исследована автором книги [6].

Пример 6.9. Вернемся к примеру оценки кандидатов, предполагая, что $w_1 = 0.4$ и $w_2 = 0.6$. Используя табл. 6.2, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(1) &= \min\{w_1 C_1(1), w_2 C_2(1)\} = \\ &= \min\{0.4 \cdot 1, 0.6 \cdot 3\} = 0.4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(2) &= \min\{w_1 C_1(2), w_2 C_2(2)\} = \\ &= \min\{0.4 \cdot 2, 0.6 \cdot 2\} = 0.8,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(5) &= \min\{w_1 C_1(5), w_2 C_2(5)\} = \\ &= \min\{0.4 \cdot 3, 0.6 \cdot 1\} = 0.6.\end{aligned}$$

Отсюда можно заключить, что второй кандидат является наилучшим, так как $\mathbf{C}(2) > \mathbf{C}(5) > \mathbf{C}(1)$.

В работе [21] доказано, что при конечном множестве возможных решений, положительных критериях и "рациональном" поведении ЛПР любое выбираемое решение всегда может быть получено в результате максимизации $\mathbf{C}(a)$ на множестве $\mathcal{A}$ при определенных положительных весовых коэффициентах $w_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$. Таким образом, метод максиминной свертки лишен ограничения, связанного с выпуклостью множества векторных оценок $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, которое имело место при использовании линейной свертки.

В методе максиминной свертки на значение функции $\mathbf{C}(a)$ оказывает влияние только тот частный критерий C_k, которому для данной альтернативы a соответствует наименьшее значение соответствующей функции $C_k(a)$. В случае максиминного критерия осуществляется расчет "на наихудший случай" [35], и по значению $\mathbf{C}(a)$ можно определить гарантированную нижнюю оценку для всех критериев $C_k(a)$.

6.5.4. Мультипликативная свертка

Другим вариантом скаляризации критериев является мультипликативная свертка, в соответствии с которой

$$\mathbf{C}(a) = \prod_{i=1}^{m} (C_i(a))^{w_i}\,. \tag{6.8}$$

Решение $a^* \in \mathcal{A}$ является наилучшим, если для всех $a \in \mathcal{A}$ выполняется условие $\mathbf{C}(a^*) \geq \mathbf{C}(a)$, или

$$a^* = \arg\max_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{C}(a) = \arg\max_{a \in \mathcal{A}} \prod_{i=1}^{m} (C_i(a))^{w_i}\,.$$

Условием парето-оптимальности решения, полученного с использованием мультипликативной свертки, является [19] выпуклость множества допустимых решений и вогнутость всех функций $\ln C_i(a)$, $i = 1, ..., m$. Несмотря на такие жесткие ограничения, данный тип свертки достаточно часто используется в экономических задачах.

Пример 6.10. Вернемся к примеру оценки кандидатов, предполагая, что $w_1 = 0.4$ и $w_2 = 0.6$. Используя табл. 6.2, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(1) &= (C_1(1))^{w_1} + (C_2(1))^{w_2} = \\ &= 1^{0.4} + 3^{0.6} = 2.93,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(2) &= (C_1(2))^{w_1} + (C_2(2))^{w_2} = \\ &= 2^{0.4} + 2^{0.6} = 2.84,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(5) &= (C_1(5))^{w_1} + (C_2(5))^{w_2} = \\ &= 3^{0.4} + 1^{0.6} = 2.55.\end{aligned}$$

Отсюда можно заключить, что первый кандидат является наилучшим, так как $\mathbf{C}(1) > \mathbf{C}(2) > \mathbf{C}(5)$.

6.5.5. Метод идеальной точки

Пусть $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Определим идеальную точку на $\mathcal{C}$ следующим образом. Положим $b_i = \max_{\mathcal{A}} C_i(a)$, $i = 1, ..., m$. Таким образом, b_i является максимально возможным значением по i-му критерию. Точка $a \in \mathcal{A}$, для которой выполняется условие $C_i(a) = b_i$, является решением обычной однокритериальной задачи принятия решений. Обозначим $b = (b_1, ..., b_m)$. Точка b называется *идеальной*. Смысл названия связан с тем, что такие точки оптимальны сразу по всем критериям: получить большее значение ни по одному критерию невозможно. Как правило, не существует альтернативы $a \in \mathcal{A}$, для которой выполнялись бы все равенства $C_i(a) = b_i$, $i = 1, ..., m$.

Зададим расстояние $\rho(b, C(a))$ между точками b и $C(a)$, например,

$$\rho(b, C(a)) = \left(\sum_{i=1}^{m} (b_i - C_i(a))^p \right)^{1/p},$$

где $p = 1, 2, 3, \dots$.

Метод идеальной точки сводит исходную многокритериальную задачу к решению обычной однокритериальной задачи

$$\rho(b, C(a)) \to \min_{a \in \mathcal{A}}.$$

Пример 6.11. Вернемся к примеру оценки кандидатов. Идеальная точка – $b = (3, 3)$. Принимая $p = 2$, получим следующие расстояния для каждой альтернативы:

$$\rho(b, C(1)) = \left((3-1)^2 + (3-3)^2\right)^{1/2} = 2,$$

$$\rho(b, C(2)) = \left((3-2)^2 + (3-2)^2\right)^{1/2} = 1.41,$$

$$\rho(b, C(5)) = \left((3-3)^2 + (3-1)^2\right)^{1/2} = 2.$$

Отсюда можно заключить, что второй кандидат является наилучшим, так как расстояние $\rho(b, C(2))$ является минимальным.

Интересно отметить некоторую аналогию между методом идеальной точки и методом принятия однокритериального решения в соответствии с критерием минимакса сожалений. Здесь расстояние до идеальной точки можно рассматривать как сожаление о том, что выбирая ту или иную альтернативу, мы не достигаем идеальной точки.

В рассмотренном варианте метода идеальной точки не использовалась дополнительная информация о критериях. Если известны веса критериев $W = (w_1, ..., w_m)$, то расстояние до идеальной точки вычисляется с учетом этих весов по формуле:

$$\rho(b, C(a)) = \left(\sum_{i=1}^{m} w_i \left(b_i - C_i(a) \right)^p \right)^{1/p}.$$

Пример 6.12. Возвращаясь к числовому примеру и принимая $w_1 = 0.4$ и $w_2 = 0.6$, получаем значения расстояний для каждой альтернативы

$$\rho(b, C(1)) = 1.26, \ \rho(b, C(2)) = 1, \ \rho(b, C(5)) = 1.545.$$

Второй кандидат снова является оптимальным.

6.6. Рандомизированные стратегии

При выполнении условия однородности критериев, оценки о предпочтениях критериев могут быть трансформированы в соотношения весов:

B1) нестрогое предпочтение: $w_i \geq w_j$;

B2) строгое предпочтение: $w_i - w_j \geq \lambda_i$;

B3) кратное предпочтение: $w_i \geq \lambda_i w_j$;

B4) интервальная форма: $\lambda_i \leq w_i \leq \lambda_i + \epsilon_i$;

B5) предпочтение разностей: $w_i - w_j \geq w_k - w_l$, для всех $j \neq k \neq l$.

Здесь λ_i и ϵ_i – неотрицательные числа.

Пусть $\mathcal{W}^0$ - множество всех весов, удовлетворяющих условию $w_1 + ... + w_m = 1$. Это множество представляет из себя единичный симплекс[8] размерности m. Тогда каждая оценка

[8] Здесь под симплексом понимается многогранник в m-мерном пространстве с координатами $w_1, ...w_m$, каждая точка которого удовлетворяет равенству $w_1 + ... + w_m = 1$.

вида B1–B5 отсекает на единичном симплексе весов некоторое подмножество $\mathcal{W}_k$. Так как все оценки линейны, т.е. они формируют систему линейных неравенств, то образуемое в результате пересечения различных подмножеств $\mathcal{W}_k$ множество $\mathcal{W}^\Omega$ является выпуклым. Таким образом множество всех весов $\mathcal{W}^0$ сужается до множества $\mathcal{W}^\Omega \subseteq \mathcal{W}^0$, где Ω – информация, полученная на основе оценок вида B1–B5.

Необходимо отметить, что множество $\mathcal{W}^\Omega$ может оказаться пустым, если полученные оценки являются противоречивыми, т.е. соответствующие подмножества $\mathcal{W}_k$ не имеют общих точек. В этом случае нужно корректировать противоречивые оценки.

Особенностью такого подхода является рассмотрение не одного вектора весов для критериев, а целого их множества. Дальнейшее использование множества $\mathcal{W}^\Omega$ зависит от дополнительных предположений, касающихся вида распределения вероятностей на множестве точек симплекса $\mathcal{W}^0$. Во многих случая предполагается, что распределение вероятностей на $\mathcal{W}^0$ является равномерным, т.е. вектор W имеет равномерную плотность вероятности ρ. Тогда, используя математическое ожидание обобщенного критерия $\mathbf{C}(a)$ и максимизируя его по всем $a \in \mathcal{A}$, можно найти оптимальное решение. Другими словами, решается задача оптимизации

$$a^* = \arg\max_{a\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_\rho\left(\mathbf{C}(a)\right).$$

Если $\mathbf{C}(a)$ является линейной функцией критериев $C_1(a),...,C_m(a)$ с коэффициентами $w_1,...,w_m$, то

$$\mathbb{E}_\rho\left(\mathbf{C}(a)\right) = \mathbb{E}_\rho\left[\sum_{i=1}^m w_i C_i(a)\right] = \sum_{i=1}^m C_i(a)\mathbb{E}_\rho\left(w_i\right),$$

т.е. задача сводится к определению математических ожиданий весов $\mathbb{E}_\rho\left(w_i\right)$, $i = 1,...,m$, как случайных чисел.

Представленный метод решения многокритериальной задачи называется рандомизированной стратегией[9], так как в со-

[9]Не следует путать рандомизированную стратегию для решения мно-

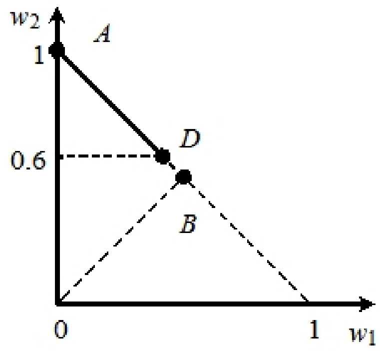

Рис. 6.4. Множество точек, ограниченное неравенствами $w_1 \leq w_2$ и $w_2 \geq 0.5$

ответствии с этим методом предполагается, что вектор весов является случайным.

Пример 6.13. Вернемся к примеру оценки кандидатов, предполагая, что $w_1 \leq w_2$ и $w_2 \geq 0.6$ при условии $w_1 + w_2 = 1$. На рис. 6.4 отрезок AB соответствует условию $w_1 \leq w_2$, а отрезок AD – множество точек (w_1, w_2), ограниченное всеми неравенствами. Так как распределение вероятностей точек на отрезке равномерное, то математическое ожидание весов соответствует середине отрезка AD, т.е. $\mathbb{E}_\rho(w_1) = 0.2$, $\mathbb{E}_\rho(w_2) = 0.8$.

Используя табл. 6.2, получим

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\rho(\mathbf{C}(1)) &= C_1(1)\mathbb{E}_\rho(w_1) + C_2(1)\mathbb{E}_\rho(w_2) = \\ &= 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.8 = 2.6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\rho(\mathbf{C}(2)) &= C_1(2)\mathbb{E}_\rho(w_1) + C_2(2)\mathbb{E}_\rho(w_2) = \\ &= 2 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.8 = 2,\end{aligned}$$

гокритериальных задач и смешанную стратегию в однокритериальных задачах принятия решений, которая также иногда называется рандомизированной.

$$\mathbb{E}_{\rho}\left(\mathbf{C}(5)\right) = C_1(5)\mathbb{E}_{\rho}\left(w_1\right) + C_2(5)\mathbb{E}_{\rho}\left(w_2\right) = \\ = 3 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.8 = 1.4.$$

Отсюда можно заключить, что первый кандидат является наилучшим, так как $\mathbf{C}(1) > \mathbf{C}(2) > \mathbf{C}(5)$.

В общем случае при большом числе критериев определение математического ожидания весов может натолкнуться на значительные трудности. Также следует отметить, что предположение равномерности распределения весов может быть неверным, а выбор математического ожидания в качестве характеристики случайного вектора весов является слишком жестким условием.

6.7. Метод анализа иерархий

Метод анализа иерархий (МАИ) в настоящее время является, пожалуй, самым популярным подходом к решению многокритериальных задач. Это, прежде всего, связано с тем, что многие реальные проблемы можно представить в виде некоторой иерархической структуры целей, подцелей, вариантов решений (альтернатив), на основе которой построен метод. Кроме этого, МАИ использует матрицы парных сравнений для получения дополнительной информации о критериях и альтернативах, построение которых для многих экспертов является достаточно простой задачей.

Решение задачи с использованием МАИ состоит из четырех основных этапов.

1. Первый этап заключается в формализации задачи в виде иерархической структуры с несколькими уровнями: цель, критерии, альтернативы.

2. На втором этапе эксперты или ЛПР выполняют попарные сравнения элементов каждого уровня. Результаты сравнений представляются в виде совокупности матриц парных сравнений.

3. На основе полученных матриц парных сравнений вычисляются коэффициенты важности для элементов каждого уровня. При этом проверяется согласованность суждений экспертов или ЛПР при помощи индекса согласованности.

4. Подсчитывается итоговый вес каждой из альтернатив и определяется наилучшая альтернатива или они ранжируются.

Второй и третий этапы уже были детально рассмотрены в разделах 6.4.2–6.4.4. Поэтому ниже внимание будет уделено первому и четвертому этапам.

Иерархическую структуру задачи можно разделить на три основные части. Первая часть – цель задачи или ее "фокус". С точки зрения модели принятия решений эта часть не несет особой смысловой нагрузки. Цель задачи является вершиной иерархической структуры и служит в основном для обозначения вершины всей структуры. Вторая часть – иерархия критериев.

При формировании математической модели ситуации принятия решений основная цель может быть декомпозирована на ряд более простых (локальных) подцелей, которые также представляют собой иерархическую структуру подцелей, или критериев, с несколькими уровнями иерархии. Необходимо отметить, что в частном случае задачу принятия решений удается формализовать при помощи одного уровня критериев. На рис. 6.5 показана иерархия подцелей, состоящая из k уровней. На этом рисунке также показан уровень альтернатив $A_1, ..., A_n$. Нумерация критериев определяется последовательно от "родителей" к "наследуемым" вершинам[10]. При этом вершина на j-м уровне имеет j индексов, соответствующих пути от рассматриваемой вершины к вершине на самом верхнем уровне. Например, вершина $C(3, 1, 2)$ является вторым критерием с "родителем" номер один на втором уровне и исходной вершиной с номером три на первом уровне. Иерархия может иметь самую различную структуру и не должна обязательно быть симмет-

[10] Здесь под "родителем" некоторых вершин, называемых "наследуемыми" вершинами, или "наследниками", понимается вершина, находящаяся на уровень выше и имеющая непосредственную связь с "наследниками".

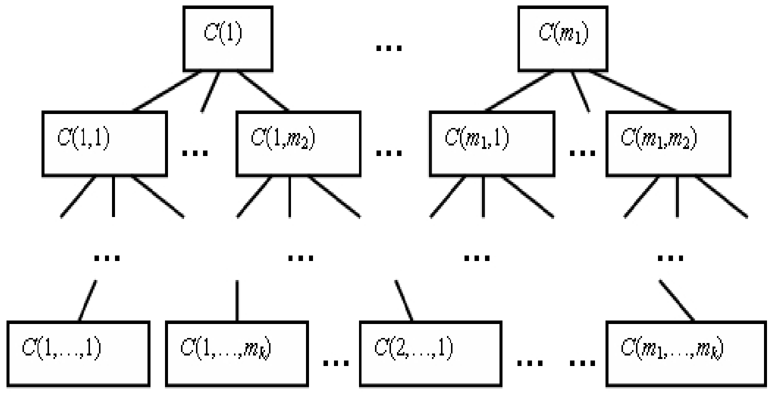

Рис. 6.5. Иерархия целей и альтернатив

ричной. Так, у вершины $C(1)$ может быть три “наследника”, а у вершины $C(2)$ - два, т.е. критерии одного уровня, но различных “родителей”, могут быть одинаковыми, а могут различаться.

Перейдем к четвертому этапу реализации МАИ. Пусть задана некоторая иерархия целей. Сначала рассматривают все критерии нижнего уровня. При этом для группы критериев этого уровня по их “родителю” определяется матрица парных сравнений, на основе которой для каждого критерия этой группы вычисляется его вес $c(i_1, ..., i_k)$. Аналогичные матрицы составляются для групп критериев каждого уровня и вычисляются соответствующие веса критериев. Далее для каждого критерия нижнего (k-го) уровня формируются матрицы парных сравнений альтернатив $A_1, ..., A_n$ в соответствии с этим критерием. На основе полученных матриц вычисляются условные веса альтернатив $w_i(i_1, ..., i_k)$, $i = 1, ..., n$, зависящие от соответствующих критериев, находящихся на пути $(i_1, ..., i_k)$. Следует отметить, что во многих задачах принятия решений веса альтернатив зависят только от критериев самого нижнего уровня.

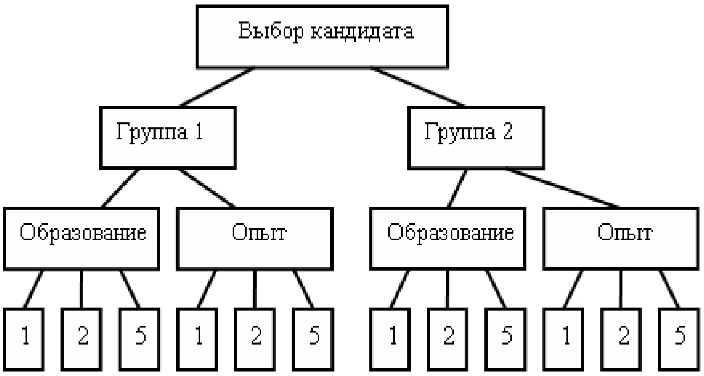

Рис. 6.6. Иерархическая структура выбора кандидатов

Комбинированные веса определяются по формуле полной вероятности, или с использованием линейной свертки критериев. Так, комбинированный вес альтернативы A_j, обозначаемый $\mathbf{w}(A_j)$, определяется из выражения

$$\mathbf{w}(A_j) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \ldots \sum_{i_k=1}^{m_k} c(i_1, ..., i_k) w_j(i_1, ..., i_k).$$

В этом выражении предполагается, что количество "наследуемых" вершин в пределах одного уровня является одинаковым для каждого "родителя". Если это условие не выполняется, скажем на уровне j, то j-я сумма заменяется на несколько сумм, в каждой из которых свое количество слагаемых, равное количеству "наследуемых" вершин следующего уровня.

Пример 6.14. Вернемся к примеру с кандидатами на должность, предполагая, что имеется две независимые группы людей (Группа 1 и Группа 2), оценивающих кандидатов. Эти группы можно рассматривать в качестве критериев первого уровня иерархии подцелей. При этом для каждой группы критерии "образование" и "опыт" имеют свою значимость. Иерархическая структура показана на рис. 6.6.

Для сокращения расчетов будем предполагать, что веса альтернатив зависят только от критериев последнего уровня. Матрица парных сравнений кандидатов по критерию “образование” приведена в примере 6.4. Веса кандидатов по этому критерию равны

$$w_1(1,1) = 0.625,\ w_2(1,1) = 0.238,\ w_3(1,1) = 0.137.$$

Матрица парных сравнений кандидатов по критерию “опыт” приведена в примере 6.6. Веса кандидатов равны

$$w_1(1,2) = 0.355,\ w_2(1,2) = 0.223,\ w_3(1,2) = 0.422.$$

Предполагаем, что $w_i(1,j) = w_i(2,j)$, $j = 1,2$, $i = 1,2$. Это означает, что сравнение кандидатов осуществляется только по критериям “образование” и “опыт” и не зависит от групп экспертов (первый уровень иерархии подцелей).

Матрица парных сравнений критериев “образование” и “опыт” в соответствии с представлениями первой группы экспертов имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда веса критериев второго уровня (“образование” и “опыт”) равны

$$c(1,1) = 0.667,\ c(1,2) = 0.333.$$

Матрица парных сравнений этих же критериев в соответствии с представлениями второй группы экспертов имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда веса критериев второго уровня (“образование” и “опыт”) равны

$$c(2,1) = 0.25,\ c(2,2) = 0.75.$$

Матрица парных сравнений самих групп экспертов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда веса критериев первого уровня (веса групп) равны

$$c(1) = 0.2,\ c(2) = 0.8.$$

Итоговый вес первого кандидата равен

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(1) &= c(1)\cdot[c(1,1)\cdot w_1(1,1)+c(1,2)\cdot w_1(1,2)]+\\ &+c(2)\cdot[c(2,1)\cdot w_1(2,1)+c(2,2)\cdot w_1(2,2)]=\\ &=0.2\cdot[0.667\cdot 0.625+0.333\cdot 0.355]+\\ &+0.8\cdot[0.25\cdot 0.625+0.75\cdot 0.355]=\\ &=0.445.\end{aligned}$$

Аналогично можно вычислить веса второго и пятого кандидатов, заменив в последнем выражении w_1 на w_2 и w_3 соответственно. Тогда получаем

$$\mathbf{w}(2)=0.228,\ \mathbf{w}(5)=0.327.$$

Таким образом, оптимальным является первый кандидат, так как $\mathbf{w}(1)>\mathbf{w}(5)>\mathbf{w}(2)$.

Наиболее простой случай, когда имеется только один уровень подцелей, достаточно подробно рассмотрен в разделе 7.3.

Очевидно, что МАИ является расширением обычной линейной свертки критериев при условии, что веса критериев и веса альтернатив (значений векторного критерия) вычисляются при помощи матриц парных сравнений. При нескольких уровнях критериев веса линейной свертки, образованной k-м уровнем критериев, определяются при помощи линейных сверток критериев $(k-1)$-го уровня. Если имеется только один уровень критериев, то МАИ полностью совпадает с линейной сверткой критериев. Отсюда следует, что все недостатки, присущие линейной свертке, являются недостатками МАИ.

6.8. Модификация метода анализа иерархий с использованием теории Демпстера-Шейфера

Достоинствами МАИ являются его универсальность и простота. Однако этот метод имеет ряд очевидных недостатков. Одним из главных недостатков является необходимость построения большого числа матриц парных сравнений и определения большого числа оценок парных сравнений альтернатив и критериев. Другим недостатком является то, что МАИ работает только с жесткими оценками альтернатив и не допускает неопределенности в суждениях экспертов или ЛПР. Это условие не выполняется в большинстве случаев, так как эксперт обычно неточен и ненадежен. При построении матриц парных сравнений эксперту не разрешается отвечать “не знаю” и “не уверен”, что существенно ограничивает применение метода. Эксперты в ряде ситуаций сталкиваются с затруднениями при оценке степени превосходства одних альтернатив над другими в рамках имеющейся шкалы. Кроме того, при большом количестве альтернатив или критериев значительно повышается вероятность получения несогласованных матриц парных сравнений.

В литературе рассмотрено значительное число модификаций МАИ, направленных на ослабление слишком жестких требований, предъявляемых к экспертам. Большинство подходов заключается в том, что точные оценки парных сравнений экспертов заменяются на интервальные или нечеткие. Такая замена позволяет частично решить проблему неточности и неопределенности оценок экспертов или ЛПР. Однако она не снимает вопросы, связанные с несогласованностью матриц и с необходимостью предоставления большого числа оценок.

Другой модификацией МАИ является метод, который использует элементы теории Демпстера-Шейфера (см. главу 3). Этот метод сокращенно будем обозначать ДШ/МАИ (сокращение от Демпстер-Шейфер/Метод анализа иерархий).

В методе ДШ/МАИ вместо сравнения отдельных альтернатив между собой экспертам или ЛПР предлагается по каждому из критериев выделить из множества всех альтернатив подгруппы и затем определить степени их предпочтения в заданной шкале по отношению ко всем оставшимся альтернативам. При этом эксперт сам определяет, для каких подгрупп или подмножеств альтернатив он может определить степени их предпочтения. Наиболее интересной особенностью метода ДШ/МАИ является то, что предпочтение отдельной подгруппы альтернатив эквивалентно заданию парного сравнения этой подгруппы и всего множества альтернатив. Далее обработка результатов экспертного опроса и вычисление весов альтернатив осуществляется с использованием теории Демпстера-Шейфера. При этом в соответствии с правилом комбинирования свидетельств Демпстера (см. раздел 3.3) вычисляются комбинированные базовые вероятности и определяются функции доверия и правдоподобия для всех подгрупп альтернатив, включая подгруппы, состоящие из одной альтернативы. На основании значений этих функций принимается решение о выборе той или иной альтернативы.

Метод ДШ/МАИ позволяет разрешить часть проблем, имеющих место в стандартном МАИ, включая несогласованность матриц парных сравнений, большое количество сравнений при построении матриц парных сравнений, сложность в представлении “незнания” экспертов или ЛПР.

Пусть имеется множество альтернатив $\mathbb{A} = \{A_1, ..., A_n\}$, состоящее из n элементов. Кроме того, имеется множество критериев $\mathbb{C} = \{C_1, ..., C_r\}$, состоящее из r элементов. ЛПР, или эксперт, в соответствии с заданным критерием $C_j \in \mathbb{C}$ из множества критериев $\mathbb{C}$ выделяет некоторое подмножество или группу $B_k \subseteq \mathbb{A}$ альтернатив из множества $\mathbb{A}$ и устанавливает степень предпочтения этой группы в значениях заданной шкалы предпочтений. Тем самым он устанавливает предпочтение вида $B_k \succeq \mathbb{A}$ или $B_k \succeq \mathbb{A}\backslash B_k$, означающее тот факт, что из всего множества альтернатив подмножество B_k для ЛПР является наиболее предпочтительным подмножеством альтернатив с соответствии с заданным критерием. Выбор экспертом всех альтернатив, т.е. установление предпочтения вида $\mathbb{A} \succeq \mathbb{A}$ означает, что он затрудняется выбрать из всего множества $\mathbb{A}$ какие-либо наиболее предпочтительные альтернативы. Другими словами, ЛПР предоставляет парное сравнение группы альтернатив B_k с множеством $\mathbb{A}$. Необходимо отметить, что в стандартном МАИ предоставляются парные сравнения только одиночных альтернатив с одиночными. В результате экспертного опроса усеченные матрицы парных сравнений с множеством $\mathbb{A}$ строятся для каждого критерия. Под усеченностью матриц здесь понимается то, что парные сравнения, отличающиеся от сравнений вида

$B_k \succeq \mathbb{A}$ или $\mathbb{A} \succeq B_k$, не заполняются[11].

После того как все оценки, касающиеся альтернатив, получены, определяются веса критериев на основе обычных матриц парных сравнений аналогично тому, как это сделано в стандартном МАИ.

Алгоритм поиска оптимальной альтернативы по методу ДШ/МАИ:

1) Заполняются усеченные матрицы парных сравнений *выделенных экспертом или ЛПР групп альтернатив*, обладающие свойством обратной симметричности, в соответствии с критериями. При этом ненулевые и неединичные значения имеют элементы только крайнего справа столбца и нижней строки матрицы, так как только они характеризуют степени x_{ij} предпочтений вида $B_k \succeq \mathbb{A}$ (крайний справа столбец) или степени $1/x_{ij}$ предпочтений вида $\mathbb{A} \succeq B_k$ (нижняя строка). Элементы на диагонали матрицы равны единице, а все остальные элементы равны нулю[12].

2) Заполняются матрицы парных сравнений *критериев* по стандартной схеме МАИ и вычисляются нормированные веса критериев $c_1, ..., c_r$ как нормированный вектор собственных значений матрицы (см. раздел 6.4.2).

3) Для комбинирования полученных оценок с учетом весов критериев усеченные матрицы парных сравнений альтернатив преобразуются следующим образом. Обозначим вес k-го критерия c_k, а значение степени превосходства i-й группы альтернатив по отношению к j-й группе x_{ij} (значение элемента усеченной матрицы парных сравнений, находящегося на пересечении i-й строки и j-го столбца). Здесь нулевые элементы не рассматриваются. Тогда соответствующий элемент преобразованной матрицы парных

[11] Предпочтение $\mathbb{A} \succeq B_k$ – это вариант записи предпочтения $\mathbb{A} \backslash B_k \succeq B_k$ или $B_k \preceq \mathbb{A}$.

[12] Заполнение нулями матрицы осуществляется формально, чтобы показать отсутствие соответствующих сравнений. Эти элементы матрицы могут просто не заполняться.

сравнений, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен $c_k \cdot x_{ij}$ если $x_{ij} \geq 1$, и $1/(c_k \cdot x_{ij})$, если $x_{ij} < 1$.

4) Для каждой преобразованной матрицы парных сравнений групп альтернатив вычисляются вектора собственных значений матрицы. После нормирования элементы этих векторов рассматриваются в качестве базовых вероятностей $m_i(B_k)$ соответствующих групп альтернатив, где индекс i означает номер критерия, которому соответствует анализируемая матрица парных сравнений групп альтернатив, а индекс k означает номер группы альтернатив, по которой была получена оценка степени предпочтения $B_k \succeq \mathbb{A}$.

5) Для вычисления итоговых весов альтернатив с учетом всех критериев каждый набор базовых вероятностей, соответствующих одному из критериев, можно рассматривать в качестве отдельного независимого источника информации. При наличии нескольких таких источников (нескольких критериев) используется правило комбинирования свидетельств Демпстера (см. раздел 3.3). Результатом комбинирования в соответствии с правилом Демпстера являются базовые вероятности выделенных групп альтернатив и их всевозможных пересечений.

6) По комбинированным базовым вероятностям вычисляются функции доверия $\mathrm{Bel}(\{A_i\})$ и правдоподобия $\mathrm{Pl}(\{A_i\})$ каждой альтернативы. Выбор оптимальной альтернативы осуществляется сравнением интервалов $[\mathrm{Bel}(\{A_i\}), \mathrm{Pl}(\{A_i\})]$, образованных функциями доверия и правдоподобия. Максимальный интервал соответствует оптимальному решению. Под максимальным интервалом здесь понимается такой интервал, у которого нижнее значение (функция доверия) и верхнее значение (функция правдоподобия) являются наибольшими среди аналогичных значений всех остальных интервалов. Если интервалы являются вложенными, то их сравнение выполняется

с использованием коэффициента пессимизма (см. раздел 3.4). В этом случае задача сравнения интервалов сводится к задаче сравнения n точных чисел

$$\gamma \cdot \mathrm{Bel}(\{A_i\}) + (1-\gamma)\mathrm{Pl}(\{A_i\}),\ i = 1, ..., n.$$

Здесь $\gamma \in [0, 1]$ – коэффициент пессимизма.

Необходимо отметить, что можно вычислять также функции доверия и правдоподобия произвольных подгрупп альтернатив и принимать решение по значениям этих функций. Их использование в принятии решений определяется ЛПР.

Рассмотрим пример задачи принятия решений с использованием метода ДШ/МАИ.

Пример 6.15. Предположим, что необходимо принять решение при условии, что ЛПР должен выбрать один из трех возможных каналов для размещения рекламы на телевидении (A_1, A_2, A_3) по двум критериям: цена размещения (C_1) и популярность канала (C_2). Матрица сравнений в соответствии с критерием C_1 показана в табл. 6.3. Будем использовать шкалу для оценивания степени предпочтения групп альтернатив, имеющую шесть значений от 1 до 6, где значение 1 означает одинаковость альтернатив или невозможность их сравнения, а значение 6 означает абсолютную степень превосходства. Из табл. 6.3 следует, что альтернативы A_2 и A_3 рассматриваются ЛПР как наиболее предпочтительные по сравнению с оставшимися альтернативами множества $\mathbb{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$. Нулевые значения в клетках матрицы указывают на отсутствие сведений о сравнении соответствующих групп пальтернатив. Например, отношение между группами $\{A_1\}$ и $\{A_2, A_3\}$ отсутствует (см. табл. 6.3). В ряде случаев соотношение между такими группами можно определить косвенно, используя степени предпочтения альтернативы A_1 по отношению к $\mathbb{A}$ и группы $\{A_2, A_3\}$ по отношению к $\mathbb{A}$. Так, из табл. 6.3 следует, что альтернатива A_1 менее предпочтительна по отношению к $\mathbb{A}$ (значение оценки предпочтения $\{A_1\} \succeq \mathbb{A}$ равно 4), чем $\{A_2, A_3\}$ (значение оценки предпочтения $\{A_2, A_3\} \succeq \mathbb{A}$ равно 6). Аналогичная матрица сравнений в соответствии с критерием C_2 показана в табл. 6.4.

Для комбинирования полученных оценок с учетом весов критериев усеченные матрицы парных сравнений преобразуются в соответствии с правилом, описанным в п. 3 приведенного выше алгоритма поиска оптимальной альтернативы. Преобразованная матрица,

Таблица 6.3. Усеченная матрица сравнений по отношению к цене размещения

	$\{A_1\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_1, A_2, A_3\}$
$\{A_1\}$	1	0	4
$\{A_2, A_3\}$	0	1	6
$\{A_1, A_2, A_3\}$	1/4	1/6	1

Таблица 6.4. Усеченная матрица сравнений по отношению к популярности канала

	$\{A_2\}$	$\{A_1, A_2, A_3\}$
$\{A_2\}$	1	1/2
$\{A_1, A_2, A_3\}$	2	1

соответствующая первому критерию, показана в табл. 6.5 при условии, что вес критерия C_1 равен $c_1 = 0.6$. Преобразованная матрица, соответствующая второму критерию, показана в табл. 6.6 при условии, что вес критерия C_2 равен $c_2 = 0.4$. Здесь матрица парных сравнений критериев не приводится, так как такие матрицы уже детально рассматривались в разделе 6.4.2.

Используя подход, принятый в стандартном МАИ для определения весов альтернатив по матрице парных сравнений, можно получить нормированные веса соответствующих групп альтернатив, для которых даны сравнительные оценки. Из преобразованной матрицы, соответствующей первому критерию (см. табл. 6.5), получим веса групп альтернатив как собственные значения матрицы, или при помощи приближенного подхода с учетом того, что нулевые элементы усеченных матриц парных сравнений не используются в вычислениях

$$w_1^*(\{A_1\}) = (1 \cdot (4 \cdot 0.6))^{1/3} = 1.339,$$

$$w_1^*(\{A_2, A_3\}) = (1 \cdot (6 \cdot 0.6))^{1/3} = 1.533,$$

Таблица 6.5. Преобразованная матрица, соответствующая первому критерию

	$\{A_1\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\{A_1, A_2, A_3\}$
$\{A_1\}$	1	0	$4 \cdot 0.6$
$\{A_2, A_3\}$	0	1	$6 \cdot 0.6$
$\{A_1, A_2, A_3\}$	$1/(4 \cdot 0.6)$	$1/(6 \cdot 0.6)$	1

Таблица 6.6. Преобразованная матрица, соответствующая второму критерию

	$\{A_2\}$	$\{A_1, A_2, A_3\}$
$\{A_2\}$	1	$1/(2 \cdot 0.4)$
$\{A_1, A_2, A_3\}$	$2 \cdot 0.4$	1

$$w_1^*(\{A_1, A_2, A_3\}) = \left(\frac{1}{4 \cdot 0.6} \cdot \frac{1}{6 \cdot 0.6} \cdot 1\right)^{1/3} = 0.487.$$

Отсюда нормированные значения весов равны[13]

$$w_1(\{A_1\}) = \frac{1.339}{1.339 + 1.533 + 0.487} = 0.399,$$

$$w_1(\{A_2, A_3\}) = \frac{1.533}{1.339 + 1.533 + 0.487} = 0.456,$$

$$w_1(\{A_1, A_2, A_3\}) = \frac{0.487}{1.339 + 1.533 + 0.487} = 0.145.$$

Полученные значения нормированных весов можно рассматривать как базовые вероятности групп альтернатив

$$m_1(\{A_1\}) = 0.399,\ m_1(\{A_2, A_3\}) = 0.456,\ m_1(\mathbb{A}) = 0.145.$$

Аналогичным образом вычисляются веса и базовые вероятности выбранных экспертами или ЛПР групп альтернатив в соответствии со вторым критерием по табл. 6.6

$$m_2(\{A_2\}) = 0.56,\ m_2(\mathbb{A}) = 0.44.$$

Рассматривая результаты, полученные для каждого критерия, как независимые источники информации, можно использовать правило комбинирования свидетельств Демпстера для вычисления итоговых весов или базовых вероятностей альтернатив и их групп с учетом всех критериев. В табл. 6.7 представлены все возможные пересечения фокальных элементов из двух источников.

Коэффициент конфликтности K вычисляется, учитывая только клетки табл. 6.7, в которых стоят элементы “$\varnothing$”, т.е.

$$K = m_1(\{A_1\}) m_2(\{A_2\}) = 0.399 \cdot 0.56 = 0.223.$$

[13] Индекс в обозначении веса соответствует номеру критерия.

Таблица 6.7. Данные по двум критериям и их пересечения

		C_1		
		$\{A_1\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\mathbb{A}$
C_2	$\{A_2\}$	$\varnothing$	$\{A_2\}$	$\{A_2\}$
	$\mathbb{A}$	$\{A_1\}$	$\{A_2, A_3\}$	$\mathbb{A}$

Отсюда $1 - K = 1 - 0.223 = 0.777$. Из табл. 6.7 также видно, что непустые пересечения групп альтернатив имеют вид $\{A_1\}$, $\{A_2\}$, $\{A_2, A_3\}$, $\mathbb{A}$. Тогда

$$m_{12}(\{A_1\}) = \frac{1}{1-K} m_1(\{A_1\}) m_2(\mathbb{A}) = 0.226,$$

$$m_{12}(\{A_2\}) = \frac{1}{1-K} \left(m_1(\{A_2, A_3\}) m_2(\{A_2\}) + m_1(\mathbb{A}) m_2(\{A_2\}) \right) = \\ = 0.434,$$

$$m_{12}(\{A_2, A_3\}) = \frac{1}{1-K} m_1(\{A_2, A_3\}) m_2(\mathbb{A}) = 0.258,$$

$$m_{12}(\mathbb{A}) = \frac{1}{1-K} m_1(\mathbb{A}) m_2(\mathbb{A}) = 0.082.$$

На основе полученных комбинированных базовых вероятностей вычисляются функции доверия и правдоподобия:

$$\mathrm{Bel}(\{A_1\}) = m_{12}(\{A_1\}) = 0.226,$$

$$\mathrm{Pl}(\{A_1\}) = m_{12}(\{A_1\}) + m_{12}(\mathbb{A}) = 0.308,$$

$$\mathrm{Bel}(\{A_2\}) = m_{12}(\{A_2\}) = 0.434,$$

$$\mathrm{Pl}(\{A_2\}) = m_{12}(\{A_2\}) + m_{12}(\{A_2, A_3\}) + m_{12}(\mathbb{A}) = 0.774,$$

$$\mathrm{Bel}(\{A_3\}) = 0,$$

$$\mathrm{Pl}(\{A_3\}) = m_{12}(\{A_2, A_3\}) + m_{12}(\mathbb{A}) = 0.34.$$

Из приведенных результатов видно, что наибольшие значения функции доверия и функции правдоподобия имеет вторая альтернатива. Следовательно, она является оптимальной. Можно также заметить, что однозначно выбрать наилучшую альтернативу из первой и третьей альтернатив нельзя без дополнительного введения параметра пессимизма γ. Например, если принять $\gamma = 0.6$, то для первой альтернативы получаем

$$\gamma \cdot \mathrm{Bel}(\{A_1\}) + (1-\gamma)\mathrm{Pl}(\{A_1\}) = 0.6 \cdot 0.226 + 0.4 \cdot 0.308 = \\ = 0.259.$$

Для третьей альтернативы –

$$\gamma \cdot \mathrm{Bel}(\{A_3\}) + (1-\gamma)\mathrm{Pl}(\{A_3\}) = 0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.34 = \\ = 0.136.$$

Отсюда можно сделать заключение, что первая альтернатива лучше третьей.

Необходимо отметить, что свойство[14] правила комбинирования свидетельств Демпстера, согласно которому комбинирование информации при нескольких критериях может выполняться последовательно, позволяет существенно упростить процедуру вычисления итоговых функций доверия и правдоподобия. Сначала осуществляется комбинирование наборов базовых вероятностей, соответствующих первым двум критериям. Затем осуществляется комбинирование результирующего набора базовых вероятностей и набора, соответствующего третьему критерию, и т.д. Процедура комбинирования продолжается до тех пор, пока все критерии не будут учтены.

Как следует из описания метода ДШ/МАИ, он лишен ряда недостатков, присущих стандартному МАИ. Прежде всего, это отсутствие несогласованности матриц парных сравнений групп альтернатив. Это связано с тем, что выбранные экспертом или ЛПР группы альтернатив, соответствующие одному критерию, не пересекаются. Например, если из трех альтернатив $\mathbb{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ ЛПР выбрал первые две $\{A_1, A_2\}$ с

[14] Для правила комбинирования Демпстера выполняется следующее условие:

$$Z_1 * Z_2 * Z_3 = (Z_1 * Z_2) * Z_3 = Z_1 * (Z_2 * Z_3).$$

Здесь Z_i – источник информации (критерий), символ “$*$” означает комбинирование по правилу Демпстера.

некоторой степенью предпочтения по отношению к $\mathbb{A}$, то он не может выбрать с другой степенью предпочтения такие группы, как $\{A_2, A_3\}$ или $\{A_1\}$. ЛПР может выбрать только третью альтернативу $\{A_3\}$. Другой недостаток МАИ, который устранен в ДШ/МАИ – необходимость определения оценок для большого числа парных сравнений. В методе ДШ/МАИ эксперт или ЛПР может выделять и оценивать только те группы альтернатив, по которым он имеет возможность или способен предоставить соответствующую информацию в виде степени их предпочтения по отношению к другим альтернативам. Это автоматически делает возможным учет таких ответов эксперта, как “не знаю”. Очевидно, что уменьшение количества информации об альтернативах приводит к тому, что итоговые оценки получаются менее информативны, т.е. интервал функций доверия и правдоподобия расширяется. Однако этот недостаток можно в большей степени рассматривать как достоинство метода. Получив достаточно широкие интервалы, можно всегда сделать заключение о недостатке исходных оценок и попытаться получить дополнительные оценки. Другими словами, процесс принятия решений становится управляемым с точки зрения количества имеющейся информации и ее полноты для снижения риска выбора неоптимального решения.

6.9. Методы ELECTRE

6.9.1. Основные этапы решения задачи

Другим классом методов решения задач многокритериального принятия решений являются методы ELECTRE. В отличие от метода анализа иерархий в методах ELECTRE не вычисляется “вес” каждой альтернативы, а определяется условие предпочтения одной альтернативы над другой [13].

Если задано множество критериев $\mathbb{C}$, состоящее из r элементов, и критериальные оценки по всем альтернативам, то для выделения группы “наилучших” альтернатив в соответствии с методами ELECTRE необходимо выполнить следующие основные этапы.

1) На первом этапе с помощью ЛПР или экспертов определяются веса критериев – положительные действительные числа, которые тем больше, чем важнее соответствующий критерий. Очевидно, что такой подход имеет множество недостатков, связанных с неоднозначностью назначения весов критериев. В то же время в литературе [16] рассмотрены подходы, позволяющие частично устранить эту неоднозначность.

2) На основании заданных оценок двух альтернатив подсчитываются значения двух индексов: согласия и несогласия. Эти индексы определяют согласие и несогласие с гипотезой о том, что альтернатива A предпочтительнее альтернативы B.

3) Задаются уровни согласия и несогласия, с которыми сравниваются подсчитанные индексы для каждой пары альтернатив. Если индекс согласия выше заданного уровня, а индекс несогласия — ниже, то одна из альтернатив предпочтительнее другой. В противном случае альтернативы несравнимы.

4) Из множества альтернатив удаляются доминируемые. Оставшиеся образуют первое ядро. Альтернативы, входящие в ядро, могут быть либо эквивалентными, либо несравнимыми.

5) Вводятся более “слабые” значения уровней согласия и несогласия (меньший по значению уровень согласия и больший уровень несогласия), при которых выделяются ядра с меньшим количеством альтернатив.

6) В последнее ядро входят наилучшие альтернативы. Последовательность ядер определяет упорядоченность альтернатив по качеству.

Рассмотрим эти этапы подробнее.

6.9.2. Индексы согласия и несогласия

В различных методах семейства ELECTRE индексы согласия и несогласия строятся по-разному. Основные идеи построения этих индексов далее будут показаны на примере метода ELECTRE 1.

Каждому из r критериев ставится в соответствие целое число w, характеризующее важность критерия. Число w можно рассматривать как "число голосов" членов жюри, голосующих за важность данного критерия [13]. Выдвигается гипотеза о предпочтении альтернативы A по отношению к альтернативе B. Множество всех критериев $\mathbb{C}$ разбивается на три подмножества:

$\mathbb{C}^{+}$ – подмножество критериев, по которым A предпочтительнее B, т.е. $A \succ B$;

$\mathbb{C}^{0}$ – подмножество критериев, по которым A равноценно B, т.е. $A \approx B$;

$\mathbb{C}^{-}$ – подмножество критериев, по которым B предпочтительнее A, т.е. $B \succ A$.

Далее формулируется индекс согласия с гипотезой о предпочтении A по отношению к B.

Индекс согласия подсчитывается на основе весов критериев. Так, в методе ELECTRE 1 этот индекс определяется как отношение суммы весов критериев подмножеств $\mathbb{C}^{+}$ и $\mathbb{C}^{0}$ к общей сумме весов:

$$c(A,B) = \frac{\sum_{i \in \mathbb{C}^{+} \cup \mathbb{C}^{0}} w_i}{\sum_{k=1}^{r} w_k}.$$

Общим выражением для индекса согласия является

$$c(A,B) = \frac{\sum_{i \in \mathbb{C}^{+}} w_i + \alpha \sum_{i \in \mathbb{C}^{0}} w_i}{\sum_{k=1}^{r} w_k},$$

где α – параметр, принимающий значения из множества $\{1,\ 0.5,\ 0\}$ и определяющий соответственно номер модификации метода ELECTRE [14].

Можно заметить, что первое выражение для индекса согласия (метод ELECTRE 1) может быть получено из второго, приняв $\alpha = 1$.

В общем случае, вид функции c зависит от конкретного метода ELECTRE. Однако очевидно, что выполняется условие $0 \leq c(A, B) \leq 1$ и $c(A, B)$ сохраняет значение при замене одного критерия на несколько с тем же общим весом.

Индекс несогласия $d(A, B)$ с гипотезой о превосходстве A над B определяется на основе самого "противоречивого" критерия – критерия, по которому B в наибольшей степени предпочтительнее A. Чтобы учесть возможную разницу длин шкал критериев, разность оценок B и A относят к длине наибольшей шкалы:

$$d(A, B) = \max_{i \in \mathbb{C}^-} \frac{C_i(B) - C_i(A)}{L_i}.$$

Здесь $C_i(B)$, $C_i(A)$ – оценки альтернатив A и B по i-у критерию; L_i – длина шкалы i-го критерия, которая используется при неоднородных критериях. Для индекса несогласия также выполняется условие $0 \leq d(A, B) \leq 1$ и $d(A, B)$ сохраняет значение при введении более детальной шкалы по i-у критерию при той же ее длине.

Введенные индексы используются при построении матриц индексов согласия и несогласия для заданных альтернатив, так что значение $c(A, B)$ или $d(A, B)$ записывается на пересечении строки, соответствующей альтернативе A, и столбца, соответствующего альтернативе B.

В методе ELECTRE отношение предпочтения задается уровнями индексов согласия c_1 и несогласия d_1. Если $c(A, B) \geq c_1$ и $d(A, B) \leq d_1$, то альтернатива A объявляется более предпочтительной по сравнению с альтернативой B. Если же при этих уровнях сравнить альтернативы не удалось, то они объявляются несравнимыми для заданных уровней индексов согласия и несогласия, что говорит о значительной противоречивости оценок альтернатив.

Уровни индексов согласия и несогласия, при которых альтернативы сравнимы, являются достаточно мощным инструментом ЛПР и эксперта для управления процессом принятия решений. Задавая эти уровни, понижая требуемый уровень индекса согласия и повышая требуемый уровень индекса несогласия, можно исследовать имеющееся множество альтернатив.

6.9.3. Построение ядра недоминируемых элементов

При заданных уровнях на множестве альтернатив выделяется некоторое подмножество, называемое ядром, недоминируемых элементов, которые находятся либо в отношении несравнимости, либо в отношении эквивалентности. Все элементы множества альтернатив, не вошедшие в ядро, доминируются хотя бы одним элементом ядра. При изменении уровней из данного ядря выделяется его подмножество, или ядро, с меньшим количеством элементов и т.д. Эксперт предлагает ЛПР целую серию возможных решений проблемы в виде различных ядер. В конечном итоге, если это необходимо, можно получить одну лучшую альтернативу.

Пример 6.16. Вернемся к примеру с кандидатами на должность, предполагая, что кандидаты оцениваются не по двум, а по трем критериям: образование, опыт и коммуникабельность. Веса критериев равны $w_1 = 3$, $w_2 = 5$ и $w_3 = 2$. Значения критериев для трех кандидатов[15] (первого, второго и пятого) имеют вид

$$\begin{aligned} C(1) &= (1, 3, 2), \\ C(2) &= (2, 2, 2), \\ C(5) &= (3, 1, 1). \end{aligned}$$

Найдем индекс согласия $c(1, 2)$ с гипотезой о превосходстве первого кандидата над вторым. Из векторных оценок критериев можно увидеть, что для этой гипотезы[16] $\mathbb{C}^+ = \{2\}$, $\mathbb{C}^0 = \{3\}$, $\mathbb{C}^- = \{1\}$. Тогда индекс согласия равен

$$c(1, 2) = \frac{w_2 + w_3}{w_1 + w_2 + w_3} = 0.7.$$

[15] Здесь предполагается, что третий и четвертый кандидаты не принадлежат множеству Парето даже при использовании третьего критерия.

[16] Для каждой гипотезы подмножества $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^0$, $\mathbb{C}^-$ различны.

Индекс несогласия определяется из условия, что $L_i = 2$, так как используются только оценки $1, 2, 3$, и только первый критерий принадлежит подмножеству $\mathbb{C}^-$. Отсюда

$$d(1,2) = \frac{C_1(2) - C_1(1)}{2} = 0.5.$$

Найдем также для иллюстрации индекс согласия $c(5,1)$ с гипотезой о превосходстве пятого кандидата над первым. Для этой гипотезы $\mathbb{C}^+ = \{1\}$, $\mathbb{C}^0 = \varnothing$, $\mathbb{C}^- = \{2,3\}$. Тогда индекс согласия равен

$$c(5,1) = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + w_3} = 0.3.$$

Индекс несогласия равен

$$d(5,1) = \max\left(\frac{C_2(1) - C_2(5)}{2},\ \frac{C_3(1) - C_3(5)}{2}\right) = \\ = \max(1,\ 0.5) = 1.$$

Для остальных гипотез значения индексов согласия и несогласия вычисляются аналогичным образом и равны

$$c(2,1) = 0.5,\ d(2,1) = 0.5,$$

$$c(1,5) = 0.7,\ d(1,5) = 1.0,$$

$$c(2,5) = 0.7,\ d(2,5) = 0.5,$$

$$c(5,2) = 0.3,\ d(5,2) = 0.5.$$

На основе полученных значений индексов можно построить матрицы согласия $\mathbf{c}$ и несогласия $\mathbf{d}$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} - & 0.7 & 0.7 \\ 0.5 & - & 0.7 \\ 0.3 & 0.5 & - \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} - & 0.5 & 1.0 \\ 0.5 & - & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & - \end{pmatrix}.$$

Пусть уровни согласия и несогласия равны $c_1 = 0.7$ и $d_1 = 0.5$. Из матриц согласия $\mathbf{c}$ и несогласия $\mathbf{d}$ следует, что условие $c(i,j) \leq d_1 = 0.5$ и условие $c(i,j) \geq c_1 = 0.7$ одновременно выполняются для:

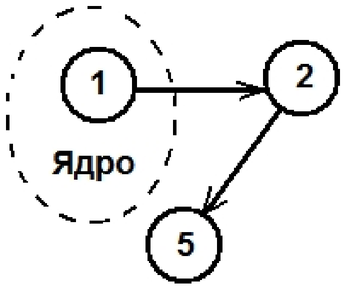

Рис. 6.7. Бинарные отношения между альтернативами при $c_1 = 0.7$ и $d_1 = 0.5$

1) второго элемента в первой строке, что соответствует отношению $1 \succeq 2$;

2) третьего элемента во второй строке, что соответствует отношению $2 \succeq 5$.

Приведенные отношения можно графически представить при помощи графа бинарных отношений (см. рис. 6.7). При этом стрелки на графе направлены от более предпочтительных альтернатив к менее предпочтительным. Из рис. 6.7 видно, что только первая альтернатива доминирует все остальные (нет ни одной входящей стрелки). Она является оптимальной и составляет первое ядро.

Если принять новые уровни согласия и несогласия $c_2 = 0.4$ и $d_2 = 0.5$, то, анализируя матрицы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$, получим следующие отношения: $1 \succeq 2$, $2 \succeq 1$, $2 \succeq 5$, $5 \succeq 2$. Соответствующий граф бинарных отношений показан на рис. 6.8. Из рис. 6.7 видно, что все альтернативы несравнимы и оптимальное решение отсутствует. Следовательно, условие $c_2 = 0.4$ и $d_2 = 0.5$ слишком жесткое.

Важным достоинством методов ELECTRE является поэтапность выявления предпочтений ЛПР в процессе назначения уровней согласия и несогласия и изучения ядер. Детальный анализ позволяет ЛПР сформировать свои предпочтения, определить компромиссы между критериями. Использование отношения несравнимости позволяет выделить пары альтернатив с противоречивыми оценками, остановиться на ядре, выде-

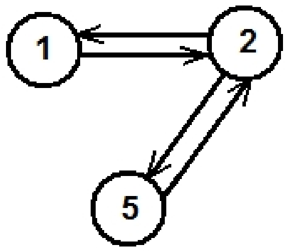

Рис. 6.8. Бинарные отношения между альтернативами при $c_2 = 0.4$ и $d_2 = 0.5$

ление которого достаточно обоснованно с точки зрения имеющейся информации.

Необходимо отметить также недостатки метода. Первый недостаток связан с некоторой произвольностью назначения весов критериев и граничных уровней согласия и несогласия. Вторым недостатком является возможное появление циклов, например, когда из трех альтернатив первая предпочтительнее второй, вторая предпочтительнее третьей, а третья предпочтительнее первой. От этой трудности можно уйти, назначив высокий уровень несогласия. Однако это смысл этого назначения с точки зрения содержания задачи принятия решений не всегда очевиден. Третий недостаток связан с возможным нарушением принципа оптимизации, согласно которому усиление требований к оптимуму должно приводить к его вложенному сужению, а ослабление – к расширению. Увеличение порога согласия и уменьшение порога несогласия в методах ELECTRE может привести совсем к другому множеству оптимальных решений [16].

6.10. Относительная важность критериев

6.10.1. Цепочки отношений и N-модели

Одним из замечательных инструментов для решения задачи многокритериального принятия решений является теория важности критериев [24], методы которой позволяют найти решение, или по крайней мере сузить множество Парето, без использования свертки. Основная идея теории заключается в оригинальном анализе и обработке качественной и количественной информации о важности критериев.

Под *качественной* информацией понимается совокупность произвольных сравнительных оценок типа: критерий C_i важнее критерия C_j ($C_i \succ C_j$) и критерии C_i и C_j равноважны или одинаковы по важности ($C_i \approx C_j$). Пусть $C^{ij}(a)$ – векторная оценка, полученная из $C(a)$ перестановкой ее компонент $C_i(a)$ и $C_j(a)$. Если $C(1) = (1,3)$ в примере 6.1, то $C^{12}(1) = (3,1)$. Используя введенные обозначения, Подиновский [24] дает следующие определения качественной информации о важности критериев.

Критерии C_i и C_j равноважны, когда любые две векторные оценки $C(a)$ и $C^{ij}(a)$ одинаковы по предпочтению. Критерий C_i важнее критерия C_j, когда всякая векторная оценка $C(a)$, в которой $C_i(a) > C_j(a)$, предпочтительнее, чем $C^{ij}(a)$.

Например, если считать, что первый критерий важнее второго в примере 6.1, то $C^{12}(5) = (1,3)$ и

$$C(5) = (3,1) \succ (1,3) = C^{12}(5).$$

Перестановка в этом случае приводит к ухудшению векторной оценки $(3,1)$ и можно сказать, что пятый кандидат предпочтительнее первого.

Каждая качественная оценка важности критериев задает на множестве векторных оценок отношение предпочтения, обозначаемое $P^{i \succ j}$, или отношение безразличия, обозначаемое $I^{i \approx j}$. Если отношение $(3,1)P^{1 \succ 2}(1,3)$ в примере 6.1 с этих позиций не вызывает сомнений и пятый кандидат предпочтительнее первого, то справедливость, например, отношения

$(3,1)P^{1\succ 2}(1,2)$ остается под вопросом[17]. Поэтому в рамках теории важности критериев предлагается построение цепочек отношений, которые могли бы привести к доказательству верности того или иного отношения.

Пример 6.17. Пусть имеются оценки в задаче с двумя критериями и двумя альтернативами $C(1) = (5,3)$, $C(2) = (2,4)$ и информация $C_1 \succ C_2$. Очевидно, что отношение $(5,3)P^{1\succ 2}(2,4)$ не является верным. Очевидно также, что альтернативы 1 и 2 в этой задаче несравнимы, т.е. принадлежат множеству Парето. Однако можно построить следующую цепочку отношений:

$$(5,3)P^{1\succ 2}(3,5),$$
$$(3,5)P^{0}(2,4),$$

где P^0 означает отношение предпочтения при отсутствии какой-либо информации о важности критериев, т.е. обычное отношение доминирования.

На основе построенной цепочки можно утверждать, что $C(1)$ предпочтительнее, чем $C(2)$. Аналогичным образом можно построить цепочки для любой качественной информации о важности критериев. Это позволяет сузить множество Парето без использования свертки критериев при условии, что исходная качественная информация не является противоречивой.

Наиболее просто построение цепочек осуществляется в случае, когда все критерии равноважны, т. е. любые два критерия одинаковы по важности. Обозначим эту информацию буквой S, т.е. $S = \{i \approx j \mid i < j\}$. Тогда для сравнения векторных оценок достаточно упорядочить по убыванию их компоненты. Например, отношение, согласно которому векторная оценка $(1,3)$ предпочтительнее оценки $(2,1)$ при наличии информации S, является справедливым, так как $(3,1)P^0(2,1)$.

Количественная информация о важности критериев может быть представлена при помощи следующих двух оценок [24]:

[17] Здесь мы предполагаем, что альтернативы с оценками $(2,2)$, $(1,3)$ и $(2,3)$ отсутствуют.

1) критерий C_i в α раз важнее критерия C_j;

2) важность критерия C_i имеет величину α_i.

Можно заметить, что первый тип оценок соответствует оценкам К3, рассмотренным в разделе 6.4, а второй тип соответствует оценкам К4 при $\varepsilon_i = 0$. Кроме того, следует отметить, что количественные оценки первого и второго типа связаны друг с другом при помощи соотношения $\alpha = \alpha_i/\alpha_j$. Если оценки α_i удовлетворяют условию $\alpha_1 + ... + \alpha_m = 1$, они называются *коэффициентами важности*.

Обработка имеющейся количественной информации о важности критериев представленного типа основана на расширении исходной модели до так называемой *N-модели*. Рассмотрим эту модель на примере 6.1.

Пример 6.18. Предположим, что в задаче примера 6.1 имеется информация о том, что опыт кандидата на должность в 3/2 раза важнее его уровня образования, запишем эту информацию в виде $\Omega = \{2 \succ^{3/2} 1\}$. Перепишем три векторные оценки $C(1)$, $C(2)$ и $C(5)$, принадлежащие множеству Парето, в "удлиненном" виде, обозначая их $C^{\Omega}(a)$ и выписывая оценку по каждому критерию столько раз, на сколько равноважных разделов можно разделить этот критерий:

$$C^{\Omega}(1) = (1, 1, 3, 3, 3),$$

$$C^{\Omega}(2) = (2, 2, 2, 2, 2),$$

$$C^{\Omega}(5) = (3, 3, 1, 1, 1).$$

Эти векторные оценки и характеризуют N-модель, где $N = (2, 3)$. В работе [24] показано, что произвольную количественную информацию можно с определенной степенью приближения представить при помощи N-модели.

Формализация приведенного примера заключается в том, что, представляя отдельные оценки важности критериев α_i в виде целых чисел n_i, а также отношения оценок важности α_i/α_j в виде отношения целых чисел n_i/n_j, строится N-модель с $n_1 + ... + n_m = N$ однородными критериями, причем первые n_1 критериев получаются повторением первого критерия

n_1 раз, следующие n_2 критериев получаются повторением второго критерия n_2 раз и т.д. При этом вновь полученные критерии являются равноважными.

Необходимо отметить, что для одной и той же информации Ω можно построить множество N-моделей, умножая каждое число n_i на одно и то же натуральное число.

Используя N-модели, определение количественной информации можно сформулировать иначе. Критерий C_i в α раз важнее критерия C_j, если для N-модели, соответствующей исходной модели выполняются следующие условия:

1) $n_i/n_j = \alpha$;

2) каждый из n_i критериев, полученных из критерия C_i равноважен любому из n_j критериев, полученных из критерия C_j.

Так как в полученных "удлиненных" векторных оценках все критерии равноважны, то можно использовать процедуру их сравнения, которая была рассмотрена выше при анализе качественной информации и основана на упорядочивании компонентов полученных векторов.

Пример 6.19. Возвращаясь к примеру 6.1 и используя векторные оценки N-модели, запишем их упорядоченные элементы, обозначенные стрелкой $\downarrow$,

$$C^{\Omega}_{\downarrow}(1) = (3, 3, 3, 1, 1),$$
$$C^{\Omega}_{\downarrow}(2) = (2, 2, 2, 2, 2),$$
$$C^{\Omega}_{\downarrow}(5) = (3, 3, 1, 1, 1).$$

Из полученных векторов видно, что оценка $C^{\Omega}_{\downarrow}(1)$ доминирует оценку $C^{\Omega}_{\downarrow}(5)$. Следовательно, пятый кандидат исключается из множества Парето. Одна количественная оценка позволила сузить множество Парето до двух элементов 1 и 2.

6.10.2. Сравнение критериев с параметрами

Методы уменьшения множества Парето в рамках теории важности критериев, представленные выше, достаточно просты в реализации. Однако они зачастую не позволяют сравнить некоторые векторные оценки.

Пример 6.20. Рассмотрим в качестве примера задачу с двумя критериями и двумя альтернативами $C(1) = (100, 1)$, $C(2) = (2, 2)$. Известно, что первый критерий в r раз предпочтительнее второго критерия, т.е. $C_1 \succ^r C_2$. Тогда

$$C^{\Omega}(1) = C^{\Omega}_{\downarrow}(1) = (100, 100, ..., 100, 1),$$

$$C^{\Omega}(2) = C^{\Omega}_{\downarrow}(2) = (2, 2, ..., 2, 2).$$

При сколь угодно большом значении r невозможно сравнить эти векторные оценки. В то же время интуитивно понятно, что первая альтернатива предпочтительнее второй, особенно, при больших значениях r.

Приведенный пример показывает, что рассмотренные методы уменьшения множества Парето в некоторых случаях могут привести к достаточно неожиданным результатам. Кроме того, рассмотренные методы используются в том случае, когда критерии являются однородными и находятся в одной шкале, что также ограничивает их практическое применение.

Поэтому рассмотрим более общий метод сравнения альтернатив с использованием важности критериев [22].

Критерий C_i важнее критерия C_j с заданными положительными параметрами v_i и v_j, если для любой векторной оценки $C(a) = (C_1(a), ..., C_m(a))$ имеет место соотношение

$$C'(a) \succ C(a),$$

где $C' = (C'_1(a), ..., C'_m(a))$, причем

$$C'_i(a) = C_i(a) + v_i,$$

$$C'_j(a) = C_j(a) - v_j,$$

$$C'_k(a) = C_k(a), \ k = 1, ..., m, \ k \neq i, \ k \neq j.$$

Другими словами, критерий C_i важнее критерия C_j, если из двух векторов C' и C ЛПР отдает предпочтение вектору C'. ЛПР всегда готово пожертвовать определенным количеством v_j по менее важному критерию C_j ради получения дополнительного количества (компенсации) v_i по более важному критерию C_i при условии сохранения значений всех остальных критериев.

При помощи чисел v_i и v_j можно количественно оценить указанную степень относительной важности. Например, используя отношение v_i/v_j и нормировав его, получим коэффициент относительной важности для i-го и j-го критериев

$$\theta_{ij} = \frac{v_j}{v_i + v_j},$$

который всегда находится в пределах от 0 до 1. Этот коэффициент показывает долю потери по менее важному критерию, на которую согласно пойти ЛПР, в сравнении с суммой указанной потери и прибавки по более важному критерию. Если коэффициент θ_{ij} близок к единице, то это означает, что ЛПР за относительно небольшую прибавку по более важному i-у критерию готово платить довольно большой потерей по менее важному j-у критерию. Такое положение соответствует ситуации, когда i-й критерий имеет сравнительно высокую степень важности по сравнению с j-м критерием. В случае, когда этот коэффициент вблизи нуля, ЛПР согласно пойти на потери по менее важному критерию лишь при условии получения существенной прибавки по более важному критерию. Это означает, что степень важности i-го критерия сравнительно невысока.

Для сужения множества Парето на основе информации об относительной важности критериев, т.е. на основе пар чисел v_i и v_j для различных i и j в работе [22] приводится следующее утверждение. Если критерий C_i важнее критерия C_j с заданными положительными параметрами v_i и v_j, то можно сузить множество Парето заменой векторного критерия $C(a)$ векторным критерием $C^*(a) = (C_1^*(a), ..., C_m^*(a))$, компоненты которого вычисляются по формулам

$$C_j^*(a) = v_j C_i(a) + v_i C_j(a),$$

$$C_k^*(a) = C_k(a),\ k = 1, 2, ..., m,\ k \neq j.$$

В соответствии с приведенными выражениями векторный критерий C^* получается из C заменой менее важного критерия C_j на линейную комбинацию критериев C_i и C_j с положительными коэффициентами v_j и v_i. Все остальные компоненты векторной оценки сохраняются.

Необходимо отметить, что данный метод позволяет обрабатывать разнородные критерии, что значительно расширяет его область применения. Однако ограничением метода является то, что его можно использовать лишь в том случае, когда компоненты векторного критерия C измеряются в количественных шкалах.

Для иллюстрации метода сравнения альтернатив с использованием важности критериев рассмотрим числовой пример[18].

Пример 6.21. Предположим, что необходимо выбрать одно из трех ($n = 3$) действий: купить облигации (a_1), купить акции предприятия (a_2) или положить деньги в банк на депозит (a_3). Для оценки выгодности каждого действия используются два критерия: величина прироста прибыли от вложения, измеряемая в процентах по отношению к исходной сумме инвестирования, и надежность вложенных средств, измеряемая в пятибалльной шкале от 1 до 5. Будем считать, что прирост надежности при переходе от отметки в 1 балл к отметке в 2 балла точно такой же, как и при переходе от отметки k, $k = 2, 3, 4$, к отметке $k + 1$. Это предположение дает возможность принять, что величина надежности измеряется в количественной шкале (шкале разностей).

Для каждого действия векторные оценки имеют следующий вид:

$$C(a_1) = (40,\ 1),$$
$$C(a_2) = (30,\ 2),$$
$$C(a_3) = (10,\ 3).$$

Нетрудно видеть, что все три вектора являются парето-оптимальными, т.е. нельзя непосредственно сравнить альтернативы без использования дополнительной информации о критериях. Предположим, что от ЛПР поступила дополнительная информация о том, что первый критерий (прирост прибыли) важнее второго (надежности).

[18] Рассматриваемый пример заимствован в несколько измененном виде из книги [22].

Используем сначала метод построения цепочек отношений на основе качественной информации. Для этого необходимо привести критерии к единой шкале, применяя формулу (6.1) и принимая в этой формуле $g = 0$, $h = 1$ (минимальное и максимальное значения "новой" шкалы). Тогда преобразованные векторные оценки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C'(a_1) &= (0.4,\ 0), \\ C'(a_2) &= (0.3,\ 0.25), \\ C'(a_3) &= (0.1,\ 0.5). \end{aligned}$$

В соответствии с определением относительной важности критериев, предложенным Подиновским [24] и представленным в начале данного раздела, перестановку первого и второго компонентов векторов оценки для сравнения можно делать, если первый компонент больше второго ($C_1(a) > C_2(a)$). Этому условию удовлетворяют только первые два вектора. Тогда можно записать отношения

$$\begin{aligned} &(0.4,\ 0)P^{1\succ 2}(0,\ 0.4), \\ &(0.3,\ 0.25)P^{1\succ 2}(0.25,\ 0.3). \end{aligned}$$

Оба отношения не дают возможности продолжить цепочки для сравнения друг с другом или с третьим вектором. Следовательно, мы не может исключить какой-либо вектор из всего множества векторов, имеющихся в наличии, и данный метод не сужает множество Парето.

Рассмотрим теперь второй метод, не требующий приведения критериев к единой шкале.

Пусть $v_2 = 1$. Тогда пересчитанные векторы будут иметь вид

$$\begin{aligned} C^*(a_1) &= (40,\ 40 + v_1), \\ C^*(a_2) &= (30,\ 30 + 2v_1), \\ C^*(a_3) &= (10,\ 10 + 3v_1). \end{aligned}$$

Система неравенств

$$\begin{cases} 40 + v_1 \geq 30 + 2v_1 \\ 40 + v_1 \geq 10 + 3v_1 \end{cases}$$

имеет решение $v_1 \leq 10$. Следовательно, если ЛПР за прирост прибыли в размере до 10% готово пожертвовать уменьшением величины надежности на одну единицу, то этому ЛПР следует выбирать первый вектор $C^*(a_1)$, так как в данном случае выполняются неравенства $C^*(a_1) \geq C^*(a_2)$ и $C^*(a_1) \geq C^*(a_3)$. Другими словами, если коэффициент относительной важности θ_{12} больше или равен $1/(10+1) = 0.091$, то выбранным должен быть единственный первый вектор.

Если $10 \leq v_1 \leq 20$, выполняется неравенство $C^*(a_2) \geq C^*(a_3)$. При этом векторы $C^*(a_1)$ и $C^*(a_2)$ несравнимы. Следовательно, альтернатива a_3 исключается из числа оптимальных решений.

Если $v_1 > 20$, то нельзя исключить какой-либо из трех векторов и сузить множество Парето. Это означает, что информация о том, что ЛПР за потерю в одну единицу надежности соглашается на прирост прибыли лишь на величину, большую 20%, является в данном случае несущественной. Коэффициент относительной важности первого критерия по сравнению со вторым, равный или меньший $1/(20+1) = 0.048$, свидетельствует о степени относительной важности, не дающей возможности в данном случае удалить из числа выбираемых ни один из возможных векторов.

Завершая описание многокритериальных задач принятия решений, следует отметить, что невозможно описать и проанализировать все существующие методы решения этих задач в рамках одной главы. Поэтому была рассмотрена только небольшая часть огромного количества подходов. Тем не менее, рассмотренные методы являются наиболее распространенными и популярными в настоящее время, что обусловлено в ряде случаев простотой их реализации с вычислительной точки зрения, в ряде случаев простотой и прозрачностью получения информации о критериях, простотой объяснения процесса решения. Описание многих других методов или различных модификаций представленных в этой главе методов можно найти в обширной литературе, посвященной этим вопросам [9, 13, 20, 22, 24, 25, 29, 30, 35].

При анализе рассмотренных методов возникает естественный вопрос. Какой из них является наилучшим? На этот вопрос можно ответить афоризмом Джорджа Бернарда Шоу: “Золотое правило гласит, что нет золотых правил”. На самом деле, не существует наилучшего метода. Даже для каждой отдельной ситуации принятия решений, для каждого отдельного ЛПР достаточно трудно выделить “оптимальный” подход. Целесообразнее в данном случае использовать несколько методов и сравнивать их результаты.

6.11. Контрольные вопросы

1) Приведите примеры задач принятия решений, в которых критерии конкурируют друг с другом.
2) Когда альтернатива является доминирующей по отношению к другой альтернативе?
3) Когда альтернатива является доминируемой по отношению к другой альтернативе?
4) Когда альтернативы являются несравнимыми?
5) Какое множество альтернатив называется множеством Парето?
6) Как графически для задач принятия решений с двумя критериями можно определить множество Парето?
7) Какое множество называется эффективным?
8) В чем заключается принцип Парето?
9) Какое решение называется слабо эффективным?
10) Какие свойства имеет матрица парных сравнений?
11) Как определить точные веса объектов по матрице парных сравнений?
12) Как определить веса объектов по матрице парных сравнений приближенным способом?
13) В чем заключается рандомизированная стратегия и какие экспертные оценки о критериях используются в данном методе решения задачи?
14) Когда целесообразно применять метод главного критерия?
15) Что такое скаляризация критериев и какие основные методы скаляризации существуют?

16) В чем заключается линейная свертка критериев?

17) Приведите примеры нелинейных сверток.

18) В чем заключается максиминная свертка критериев?

19) В чем заключается метод идеальной точки и какая аналогия существует между этим методом и одним из методов решения однокритериальной задачи?

20) Из каких основных этапов состоит метод анализа иерархий?

21) Каким образом учитывается наличие нескольких уровней критериев в методе анализа иерархий?

22) Из каких основных этапов состоит метод ДШ/МАИ?

23) Какие преимущества по сравнению с МАИ имеет метод ДШ/МАИ?

24) Что понимается под качественной информацией при определении важности критериев?

25) Что такое цепочки отношений и что они позволяют сделать?

26) Что понимается под количественной информацией при определении важности критериев?

27) Как формально определить одинаковые по важности критерии?

28) Каким образом строятся N-модели при определении важности критериев?

29) Каким образом информация о предпочтениях критериев C_i и C_j с заданными положительными параметрами v_i и v_j может быть использована для сужения множества Парето?

Таблица 6.8. Критериальные оценки четырех каналов

Каналы	Критерий		
	Ц	П	С
1	9	3	5
2	3	7	7
3	8	2	4
4	5	5	6
5	9	4	3

6.12. Задачи

1) Анализируются пять возможных каналов для размещения рекламы на телевидении. Оценки каждого канала по десятибальной системе (от 1 до 10) с точки зрения цены размещения (Ц), популярности канала (П) и соответствия аудитории рекламируемому товару (С) представлены в табл. 6.8.

   а) Определить множество Парето в соответствии с приведенными сведениями о каналах.

   б) Определить множество слабо эффективных решений.

   в) Найти наиболее предпочтительный канал, если предполагать, что наиболее значимый критерий – популярность канала. Необходимо также учесть тот факт, что цена размещения рекламы не должна иметь балл меньший 4.

   г) Найти наиболее предпочтительный канал методом идеальной точки с учетом весов критериев

$$w_1 = 0.3,\ w_2 = 0.6,\ w_3 = 0.1.$$

   д) Найти наиболее предпочтительный канал, используя линейную свертку и веса критериев

$$w_1 = 0.4,\ w_2 = 0.5,\ w_3 = 0.1.$$

е) Найти наиболее предпочтительный канал, используя максиминную свертку и веса критериев

$$w_1 = 0.2, \; w_2 = 0.5, \; w_3 = 0.3.$$

ж) Найти наиболее предпочтительный канал, используя мультипликативную свертку и равные веса критериев.

з) Сузить множество Парето при помощи цепочки отношений, если известно, что второй критерий важнее третьего.

и) Сузить множество Парето при помощи N-модели, если известно, что третий критерий в два раза важнее первого, а второй и первый равноважны.

2) Матрица парных сравнений трех критериев имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1/2 \\ 1/6 & 1 & 4 \\ 2 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Как приближенно определить веса критериев?

б) Каким образом можно точно определить веса критериев?

в) Как найти индекс согласованности матрицы?

3) Анализируются пять возможных каналов для размещения рекламы на телевидении. Критерии оценки каналов: цена размещения (Ц), популярность канала (П), соответствие аудитории рекламируемому товару (С) (см. задачу 1). ЛПР с точки зрения цены размещения рекламы выделил по 9-ти бальной шкале каналы $\{1, 2\}$ с оценкой 5 и $\{3, 4\}$ с оценкой 3. С точки зрения популярности ЛПР выделил каналы $\{4, 5\}$ с оценкой 4 и канал $\{3\}$ с оценкой 2. С точки зрения соответствия аудитории рекламируемому товару ЛПР выделил каналы $\{3, 5\}$ с оценкой 3. Найти с помощью метода ДШ/МАИ оптимальный канал

для размещения рекламы, если матрица парных сравнений критериев имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 2 \\ 4 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$